1 Trou noir de Kerr (7 **points**)

Par rapport à des coordonnées $(x^\alpha) = (t, r, \vartheta, \varphi)$, dites coordonnées de Boyer-Lindquist, la métrique de Kerr g_{ab} a pour composantes

$$g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{4Mar}{\rho^2}\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r}{\rho^2}\sin^2\vartheta\right)\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\,, \tag{1}$$

où $\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\vartheta$ et $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$. Les paramètres a et M sont des constantes. Lorsque $a \leqslant M$, la métrique de Kerr décrit un trou noir en rotation de masse M et de moment cinétique $J = aM$. Lorsque $a > M$, la métrique de Kerr n'admet pas d'horizon des événements et décrit alors une singularité nue, et non un trou noir. Le cas critique $a = M$ est appelé espace-temps de Kerr extrême. Dans ce problème, nous considérons un trou noir de Kerr, de sorte que $\bar{a} \equiv a/M \leqslant 1$.

① a) Quelles sont les symétries de l'espace-temps de Kerr apparentes sur la métrique (1) ?

b) Que dire des champs de vecteurs $\xi^a \equiv (\partial_t)^a$ et $\eta^a \equiv (\partial_\varphi)^a$?

② a) Comment se comporte la métrique de Kerr lorsque $r \to +\infty$?

b) Et lorsque $a \to 0$?

Nous admettrons que l'horizon des événements $\mathscr{H}$ de la métrique de Kerr est l'hypersurface définie par $r = R_\mathscr{H}$, où

$$R_\mathscr{H} = M\left(1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2}\right). \tag{2}$$

L'aire $A_\mathscr{H}$ d'une section $\mathscr{S}$ de l'horizon des événements est donnée par la formule

$$A_\mathscr{H} = \oint_\mathscr{S} \sqrt{\sigma}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,, \tag{3}$$

où σ est le déterminant de la métrique induite sur la surface $\mathscr{S}$, telle que $t = t_0$ et $r = R_\mathscr{H}$.

③ a) Que dire du rayon de coordonnée (2) de l'horizon des événements lorsque $a \to 0$?

b) Expliquer pourquoi l'aire (3) ne dépend pas du choix de la valeur de t_0.

c) Montrer que le déterminant σ de la métrique induite sur $\mathscr{S}$ vaut

$$\sqrt{\sigma} = \left(R_\mathscr{H}^2 + a^2\right)\sin\vartheta \tag{4}$$

d) En déduire l'expression de l'aire $A_\mathscr{H}$ en fonction de M et J.

L'horizon des événements $\mathscr{H}$ est une hypersurface de genre lumière. Nous admettrons qu'il admet comme normale le vecteur

$$l^a = \xi^a + \Omega_\mathscr{H}\,\eta^a\,, \tag{5}$$

où $\Omega_\mathscr{H}$ est une constante.

④ a) Montrer que le vecteur l^a vérifie l'équation de Killing

$$\nabla_{(a}l_{b)} = 0\,. \tag{6}$$

b) Quelle équation est vérifiée par la norme de l^a sur $\mathscr{H}$?

c) En déduire que la constante $\Omega_{\mathscr{H}}$ est donnée par

$$\Omega_{\mathscr{H}} = \frac{\bar{a}}{2R_{\mathscr{H}}}\,. \tag{7}$$

⑤ a) Montrer que la norme du vecteur ξ^a est donnée par

$$\xi^a \xi_a = -1 + \frac{2M\,r}{r^2 + a^2\cos^2\vartheta}\,. \tag{8}$$

b) En déduire qu'à l'extérieur de l'horizon des événements ($r > R_{\mathscr{H}}$), le vecteur ξ^a est du genre espace pour $r < R_{\text{ergo}}(\vartheta)$, avec

$$R_{\text{ergo}}(\vartheta) = M\left(1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2\cos^2\vartheta}\right). \tag{9}$$

À t fixé, la surface $r = R_{\text{ergo}}(\vartheta)$ est appelée *ergosphère*, et le domaine compris entre l'horizon des événements et l'ergosphère est appelé *ergorégion*. Pour l'espace-temps de Schwarzschild ($\bar{a} = 0$), l'ergosphère est confondue avec l'horizon des événements ($R_{\text{ergo}}(\vartheta) = R_{\mathscr{H}}$), de sorte qu'il n'existe pas d'ergorégion dans ce cas.

2 Processus de Penrose écologique (6 **points**)

Considérons un camion poubelle, que l'on lâche depuis l'infini vers un trou noir de Kerr en rotation. Lorsqu'il est entré dans l'ergorégion décrite dans l'exercice 1, il largue une poubelle, et donc une partie de sa masse, dans le trou noir. Supposons que la trajectoire initiale ait été choisie de sorte à ce que le camion puisse ensuite repartir vers l'infini, toujours en suivant une géodésique. Cela est possible car l'ergorégion est située en dehors de l'horizon.

① Soient p_{I}^a (resp. p_{F}^a) la quadri-impulsion du camion le long de sa ligne d'univers avant (resp. après) le largage, et p_{P}^a celle de poubelle qui tombe dans le trou noir. En utilisant la conservation de l'énergie-impulsion, écrire la relation simple vérifiée par p_{I}^a, p_{F}^a et p_{P}^a au point de largage.

② a) Expliquer pourquoi l'énergie E_{I} du camion avant son départ, et celle E_{F} à son retour, sont données par les formules (voir le problème 1 ② b) pour la définition de ξ^a)

$$E_{\text{I}} = -p_{\text{I}}^a \xi_a \quad \text{et} \quad E_{\text{F}} = -p_{\text{F}}^a \xi_a\,. \tag{10}$$

b) Que dire des grandeurs E_{I} et E_{F} le long de chacune des trajectoires ?

c) En déduire que la différence d'énergie $\Delta E \equiv E_{\mathrm{F}} - E_{\mathrm{I}}$ est donnée par la formule

$$\Delta E = p_{\mathrm{P}}^a \xi_a \,. \tag{11}$$

Si le largage avait eu lieu en dehors de l'ergorégion, alors ξ^a et p_{P}^a seraient deux vecteurs du genre temps dirigés vers le futur. Leur produit scalaire serait forcément négatif, de sorte que $\Delta E < 0$. Le camion posséderait alors moins d'énergie au retour qu'à l'aller. Mais dans l'ergorégion, le vecteur ξ^a est du genre espace, de sorte que, pour certaines configurations, on peut avoir $\Delta E > 0$.

③ Selon vous, d'où provient cet excès d'énergie ?

Nous admettrons que lorsque la poubelle traverse l'horizon des événements, le produit scalaire entre sa quadri-impulsion p_{P}^a et le vecteur l^a défini dans l'équation (5) du problème 1 doit nécessairement vérifier

$$p_{\mathrm{P}}^a l_a < 0 \,. \tag{12}$$

④ En déduire que l'énergie E_{P} et le moment cinétique L_{P} de la poubelle vérifient nécessairement l'inégalité

$$E_{\mathrm{P}} > \Omega_{\mathscr{H}} L_{\mathrm{P}} \,. \tag{13}$$

⑤ a) Justifier que lors de la chute de la poubelle dans le trou noir, les variations δM et δJ de la masse et du moment cinétique du trou noir sont données par

$$\delta M = E_{\mathrm{P}} \quad \text{et} \quad \delta J = L_{\mathrm{P}} \,. \tag{14}$$

b) Si le largage est effectué de sorte à ce que $\Delta E > 0$, alors que dire des signes de δM et δJ ? Faire le lien avec votre réponse à la question ③ ci-dessus.

⑥ a) En utilisant votre réponse à la question ③ d) de l'exercice 1, calculer la variation $\delta A_{\mathscr{H}}$ de l'aire du trou noir induite par la chute de la poubelle en fonction de $\bar{a}$, $R_{\mathscr{H}}$, E_{T} et L_{T}.

b) En déduire que l'aire du trou noir ne peut que croître au cours de ce processus.

2 Tenseur de Killing et constante de Carter (10 **points**)

On appelle *tenseur de Killing-Yano* tout champ tensoriel Y_{ab} de type $(0,2)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$Y_{ab} = Y_{[ab]} \,, \quad \nabla_a Y_{bc} = \nabla_{[a} Y_{bc]} \,. \tag{15}$$

① a) Que dire des propriétés de symétrie du tenseur Y_{ab} ?

b) Montrer qu'en vertu de la première propriété, la seconde propriété est équivalente à l'identité suivante :

$$\nabla_a Y_{bc} = -\nabla_b Y_{ac} \,. \tag{16}$$

On appelle *tenseur de Killing* tout champ tensoriel K_{ab} de type $(0, 2)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$K_{ab} = K_{(ab)}, \quad \nabla_{(a}K_{bc)} = 0 . \tag{17}$$

② a) Que dire des propriétés de symétrie du tenseur K_{ab} ?

b) Monter que les propriétés (17) impliquent

$$\nabla_a K_{bc} + \nabla_b K_{ca} + \nabla_c K_{ab} = 0 . \tag{18}$$

③ Si Y_{ab} est un tenseur de Killing-Yano, montrer que le champ tensoriel K_{ab} suivant est un tenseur de Killing :

$$K_{ab} \equiv Y_{ac} Y^c{}_b = g^{cd} Y_{ac} Y_{db} . \tag{19}$$

Soit $\mathscr{L}$ une courbe géodésique, p^a un champ de vecteurs tangents à $\mathscr{L}$ associé à un paramètre affine, et K_{ab} un tenseur de Killing. On définit alors le scalaire

$$\mathscr{K} \equiv K_{ab} p^a p^b . \tag{20}$$

④ a) À quelle équation obéit le vecteur p^a ?

b) Montrer que le scalaire $\mathscr{K}$ est conservé le long de $\mathscr{L}$, c'est-à-dire que

$$p^a \nabla_a \mathscr{K} = 0 . \tag{21}$$

c) Que dire du cas où p^a correspond à la quadri-impulsion d'une particule et $K_{ab} = g_{ab}$?

On se place désormais dans l'espace-temps de Kerr, décrit par les coordonnées de Boyer-Lindquist $(x^\alpha) = (t, r, \vartheta, \varphi)$. Considérons les vecteurs l^a et k^a définis respectivement par (voir le problème 1 pour les notations)

$$l^c = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} (\partial_t)^c + (\partial_r)^c + \frac{a}{\Delta} (\partial_\varphi)^c , \tag{22a}$$

$$k^c = \frac{r^2 + a^2}{2\rho^2} (\partial_t)^c - \frac{\Delta}{2\rho^2} (\partial_r)^c + \frac{a}{2\rho^2} (\partial_\varphi)^c . \tag{22b}$$

On admettra que la métrique de Kerr admet un tenseur de Killing K_{ab}, dérivé d'un tenseur de Killing-Yano suivant la formule (19), dont l'expression est

$$K_{ab} = 2\rho^2 l_{(a} k_{b)} + r^2 g_{ab} . \tag{23}$$

Soit également $\mathscr{P}$ une particule décrivant une géodésique $\mathscr{L}$ dans l'espace-temps de Kerr et p^a sa quadri-impulsion, de norme $\mu^2 \equiv -p^a p_a$.

⑤ a) Montrer que l^a et k^a sont des vecteurs du genre lumière.

b) Montrer de plus que $l^a k_a = -1$.

⑥ a) Montrer que, dans le cas présent, la constante (20) vaut

$$\mathcal{K} = p_\vartheta^2 + \cos^2\vartheta \left[a^2\left(\mu^2 - p_t^2\right) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} \right] + \left(p_\varphi + a\,p_t\right)^2. \qquad (24)$$

b) À quoi correspond le cas $\mu = 0$?

⑦ a) Rappeler pourquoi les scalaires $E \equiv -\xi^a p_a$ et $L \equiv \eta^a p_a$ sont conservés le long de $\mathcal{L}$.

b) En déduire que la grandeur suivante, appelée *constante de Carter*, est une constante du mouvement :

$$Q = p_\vartheta^2 + \cos^2\vartheta \left[a^2\left(\mu^2 - p_t^2\right) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} \right]. \qquad (25)$$

4 Déguisement spatio-temporel (3 **points**)

On considère un espace-temps $(\mathscr{E}, g_{ab})$ de dimension $n = 2$. Par rapport à un système de coordonnées (u, v), les composantes de la métrique valent

$$\mathrm{d}s^2 = -v^2 \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2. \qquad (26)$$

① Calculer les composantes du symbole de Christoffel par rapport aux coordonnées (u, v), puis celles du tenseur de Riemann.

② Combien de composantes indépendantes le tenseur de Riemann possède-t-il en dimension $n = 2$. Qu'en concluez-vous ?

③ En effectuant un changement de coordonnées judicieux, aboutir à la même conclusion.