Examen EL 3 (2018) CORRIGÉ

Problème 1

1 a) $\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ stationnarité
0,5

$\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow$ axisymétrie autour de "z"

b) ξ^a et η^a sont des champs de vecteurs de Killing
0,5
avec $\nabla_{(a}\xi_{b)} = \nabla_{(a}\eta_{b)} = 0$

2 a) Lorsque $r \to +\infty$, $\rho^2 \simeq r^2$ et $\Delta \simeq r^2$
0,5
$\Rightarrow g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta \simeq -dt^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$

Les composantes $g_{\alpha\beta}$ tendent vers les composantes $(\eta_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(-1, 1, r^2, r^2\sin^2\vartheta)$ de la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques. $\Rightarrow$ La métrique de Kerr tend vers la métrique de Minkowski.

b) Lorsque $a \to 0$, $\rho^2 \simeq r^2$ et $\Delta \simeq r^2\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)$
0,5
$\Rightarrow g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta \simeq -\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)$

On retrouve la métrique de Schwarzschild en coordonnées de Schwarzschild.

3 a) Lorsque $a \to 0$, $R_H = M\left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{M^2}}\right) \to 2M$.

0,5

R_H tend vers le rayon de Schwarzschild.
Dans la limite $a \to 0$ on retrouve l'horizon des événements de la métrique de Schwarzschild.

b) L'horizon des événements est une caractéristique

0,5 de l'espace-temps qui est stationnaire.

c) $t = t_0 \Rightarrow dt = 0$, $r = R_H \Rightarrow dr = 0$

0,75

composantes de la métrique induite sur S:

$$g_{ij}\, dx^i dx^j = \rho^2 d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r}{\rho^2}\sin^2\vartheta\right)\sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

$$b = \det(g_{ij}) = \det \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r}{\rho^2}\sin^2\vartheta\right)\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

avec $r = R_H$ et $R_H^2 + a^2 = M^2 + M^2 - a^2 + 2M\sqrt{M^2-a^2} + a^2$
$= 2M\left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right) = 2MR_H$

$$\Rightarrow r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r}{\rho^2}\sin^2\vartheta = \frac{2MR_H\rho^2 + 2Ma^2 R_H \sin^2\vartheta}{\rho^2} =$$

$$= \frac{2MR_H^3 + 2MR_H a^2\cos^2\vartheta + 2MR_H a^2 \sin^2\vartheta}{\rho^2}$$

$$= \frac{2MR_H(R_H^2 + a^2)}{\rho^2} = \frac{(2MR_H)^2}{\rho^2}$$

$\Rightarrow b = (2MR_H)^2 \sin^2\vartheta$

d) $\Rightarrow A_H = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 2MR_H \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 8\pi M R_H = 8\pi M^2\left(1+\sqrt{1-\bar{a}^2}\right)$

0,5

$$A_H = 8\pi M^2\left(1+\sqrt{1-\frac{J^2}{M^4}}\right)$$

4 a) $l^a = \xi^a + \Omega_H \eta^a$

0,5

$$\nabla_{(a} l_{b)} = \nabla_{(a}\xi_{b)} + \nabla_{(a}(\Omega_H \eta_{b)}) = \underbrace{\nabla_{(a}\xi_{b)}}_{\substack{= \\ 0 \text{ voir } 1b)}} + \Omega_H \underbrace{\nabla_{(a}\eta_{b)}}_{\substack{= \\ 0}}$$

b) H est une hypersurface de genre lumière. Tout vecteur

0,5 normal à H est également de genre lumière.

$\Rightarrow l^a l_a = 0$

c) $0 = l^\alpha l_\alpha = l^\alpha l^\beta g_{\alpha\beta} = \xi^t\xi^t g_{tt} + \Omega_H^2 \eta^\varphi\eta^\varphi g_{\varphi\varphi} + 2\xi^t\eta^\varphi g_{t\varphi}\Omega_H$

0,75

$$\xi^\alpha = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \eta^\alpha = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$0 = -\left(1-\frac{2Mr}{\rho^2}\right) + \Omega_H^2\left(r^2+a^2+\frac{2Ma^2r}{\rho^2}\sin^2\vartheta\right)\sin^2\vartheta - \frac{4Mar}{\rho^2}\sin^2\vartheta\,\Omega_H$$

avec $r = R_H$ et $\Omega_H = \frac{a}{2R_H}$:

$$0 = -\left(1-\frac{2MR_H}{\rho^2}\right) + \Omega_H^2\left(\frac{2MR_H}{\rho}\right)^2\sin^2\vartheta - \Omega_H\frac{4MaR_H}{\rho^2}\sin^2\vartheta \quad \Big|\cdot\rho^2$$

$$0 = -(R_H^2 + a^2\cos^2\vartheta - 2MR_H) + a^2\sin^2\vartheta - 2a^2\sin^2\vartheta$$

$$0 = -M^2\left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{M^2}}\right)^2 - a^2\cos^2\vartheta + 2M^2\left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{M^2}}\right) - a^2\sin^2\vartheta$$

$$0 = -M^2\left(1+2\sqrt{1-\frac{a^2}{M^2}}+1-\frac{a^2}{M^2}\right) - a^2 + 2M^2 + 2M^2\sqrt{1-\frac{a^2}{M^2}}$$

$$0 = -2M^2 - 2M^2\sqrt{1-\frac{a^2}{M^2}} + a^2 - a^2 + 2M^2 + 2M^2\sqrt{1-\frac{a^2}{M^2}}$$

$0 = 0$ q.e.d.

5 a) $\xi^a \xi_a = \xi^\alpha \xi^\beta g_{\alpha\beta} = g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) = -1 + \frac{2Mr}{r^2 + a^2\cos^2\vartheta}$

0,5

b) On cherche le rayon pour lequel $\xi^a \xi_a = 0$:

0,5

$$-1 + \frac{2Mr}{r^2 + a^2\cos^2\vartheta} = 0 \Rightarrow 2Mr = r^2 + a^2\cos^2\vartheta$$

$$\Rightarrow r^2 - 2Mr + a^2\cos^2\vartheta = 0$$

$$\Rightarrow r_\pm = \frac{2M \pm \sqrt{4M^2 - 4a^2\cos^2\vartheta}}{2} = M\left(1 \pm \sqrt{1 - \bar{a}^2\cos^2\vartheta}\right)$$

$$R_{ergo} = r_+ \qquad \text{et} \qquad \frac{2Mr_+}{r_+^2 + a^2\cos^2\vartheta} = 1$$

Pour $r < R_{ergo}$, $\frac{2Mr}{r^2 + a^2\cos^2\vartheta} > 1 \Rightarrow \xi^a \xi_a > 0$

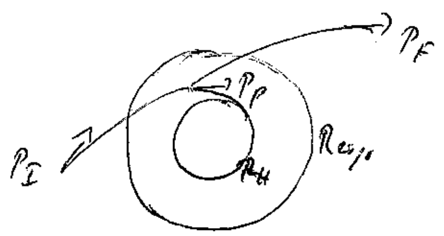
$\Rightarrow \xi^a$ est du genre espace

$\Rightarrow$ Pour $\vartheta > 0$ et $\vartheta < \pi$, il y a une région $R_H < r < R_{ergo}$ où ξ^a est du genre espace.

Problème 2

1) $p_I^a = p_F^a + p_p^a$

0,5



2) a) $E_I = -p_I^a \xi_a$

0,5

$E_F = -p_F^a \xi_a$

Pour un observateur statique à l'infini, la quadrivitesse U^a coïncide avec le vecteur de Killing du genre temps ξ^a.
L'énergie mesurée du camion est donnée par $E_I = -p_I^a U_a = -p_I^a \xi^a$ et $E_F = -p_F^a U_a = -p_F^a \xi^a$ avant départ et après retour, respectivement.

2) b) E_I et E_F sont conservées le long des géodésiques.
0,5 Cela découle de leur définition comme $-p^a \xi_a$, avec ξ^a étant un vecteur de Killing.

c) $\Delta E \equiv E_F - E_I = -p_F^a \xi_a + p_I^a \xi_a = (p_I^a - p_F^a)\xi_a = p_P^a \xi_a$
0,5

3) L'énergie vient de l'énergie de rotation du trou noir.
0,5

4) $p_p^a l_a < 0$ avec $l^a = \xi^a + \Omega_H \eta^a$
1

$$p_p^a l_a = \underbrace{p_p^a \xi_a}_{-E_p} + \Omega_H \underbrace{p_p^a \eta_a}_{L_p} < 0$$

$$-E_p + \Omega_H L_p < 0$$

$$\Rightarrow E_p > \Omega_H L_p$$

5 a) $\delta M = E_p$, $\delta J = L_p$
0,5

L'énergie E_p est conservée le long de la géodésique. Lorsque le camion traverse l'horizon des événements, E_p contribue à la masse M du trou noir.
Le moment cinétique L_p est également conservé et contribue au moment cinétique J du trou noir.

6) $\Delta E = p_p^a \xi_a = -E_p > 0 \Rightarrow E_p < 0$
0,5

$\Rightarrow \delta M < 0$

$E_p > \Omega_H L_p$ et $E_p < 0 \Rightarrow \Omega_H L_p < E_p < 0$

$\Rightarrow L_p < 0$ $\left(\Omega_H = \frac{a}{2R_H} > 0\right)$

Dans ce cas, de l'énergie et du moment angulaire sont extraits du trou noir.

5

6) a) $\delta A_H = 8\pi\, \delta\left(M^2\left(1+\sqrt{1-\frac{J^2}{M^4}}\right)\right)$

1

$$= 8\pi\, 2M\delta M\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{J^2}{M^4}}\right) + 8\pi M^2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{J^2}{M^4}\right)^{-1/2}\cdot\underbrace{\delta\left(\frac{-J^2}{M^4}\right)}_{-\frac{1}{M^4}2J\delta J - J^2(-4)\frac{1}{M^5}\delta M}$$

$$= 16\pi\,\delta M\, R_H + 16\pi\,\delta M\frac{J^2}{M^3}\frac{1}{\sqrt{1-\bar{a}^2}} - 8\pi\,\delta J\frac{J}{M^2}\frac{1}{\sqrt{1-\bar{a}^2}}$$

$$= \frac{16\pi R_H}{\sqrt{1-\bar{a}^2}}\left[E_p\cdot\left(\sqrt{1-\bar{a}^2}+\frac{\bar{a}^2 M}{M(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})}\right) - L_p\frac{\bar{a}}{2R_H}\right]$$

$$= \frac{16\pi R_H}{\sqrt{1-\bar{a}^2}}\left[E_p\frac{\sqrt{1-\bar{a}^2}(1+\sqrt{1-\bar{a}^2})+\bar{a}^2}{1+\sqrt{1-\bar{a}^2}} - L_p\,\Omega_H\right]$$

$$\delta A_H = \frac{16\pi R_H}{\sqrt{1-\bar{a}^2}}\left(E_p - \Omega_H\cdot L_p\right)$$

b) $E_p > \Omega_H L_p \implies E_p - \Omega_H L_p > 0$

0,5

et $\frac{R_H}{\sqrt{1-\bar{a}^2}} > 0 \implies \delta A_H > 0$

Problème 3

1) a) $Y_{ab} = Y_{[ab]} = \frac{1}{2}(Y_{ab} - Y_{ba})$, Y_{ab} est antisymétrique

0,5

b) $\nabla_a Y_{bc} = \nabla_{[a} Y_{bc]}$ équivalent à $\nabla_a Y_{bc} = -\nabla_b Y_{ac}$?

1

$$\nabla_a Y_{bc} = \nabla_{[a} Y_{bc]} = \frac{1}{3!}(\nabla_a Y_{bc} - \nabla_a Y_{cb} + \nabla_b Y_{ca} - \nabla_b Y_{ac} + \nabla_c Y_{ab} - \nabla_c Y_{ba})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a)}}{=} \frac{1}{3}(\nabla_a Y_{bc} + \nabla_b Y_{ca} + \nabla_c Y_{ab})$$

alors aussi:

$$\nabla_b Y_{ca} = \nabla_{[b} Y_{ca]} = \frac{1}{3}(\nabla_b Y_{ca} + \nabla_c Y_{ab} + \nabla_a Y_{bc})$$

$$= \frac{1}{3}(\nabla_a Y_{bc} + \nabla_b Y_{ca} + \nabla_c Y_{ab}) = \nabla_a Y_{bc}$$

$$\Rightarrow \nabla_a Y_{bc} = \nabla_b Y_{ca} \underset{\substack{\uparrow \\ a)}}{=} -\nabla_b Y_{ac}$$ q.e.d.

2) a) $K_{ab} = K_{(ab)} = \frac{1}{2}(K_{ab} + K_{ba})$, K_{ab} est symétrique

0,5

b) $\nabla_{(a} K_{bc)} = 0$

0,5

$$\Rightarrow \frac{1}{6}(\nabla_a K_{bc} + \nabla_a K_{cb} + \nabla_b K_{ca} + \nabla_b K_{ac} + \nabla_c K_{ab} + \nabla_c K_{ba}) = 0$$

$$\underset{\substack{\text{avec} \\ a)}}{\Rightarrow} \frac{1}{6}(2\nabla_a K_{bc} + 2\nabla_b K_{ca} + 2\nabla_c K_{ab}) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_a K_{bc} + \nabla_b K_{ca} + \nabla_c K_{ab} = 0$$

3) $K_{ab} \equiv Y_{ac} Y^c{}_b = g^{cd} Y_{ac} Y_{db}$

1

K_{ab} est bien du type $(0,2)$.

$K_{ba} = g^{cd} Y_{bc} Y_{da} = g^{dc} Y_{ad} Y_{cb} = g^{cd} Y_{ac} Y_{db} = K_{ab}$ → symétrique

$$\nabla_a K_{bc} = \nabla_a Y_{bd} Y^d{}_c + Y_{bd} \nabla_a Y^d{}_c$$

$$\nabla_b K_{ca} = \nabla_b Y_{cd} Y^d{}_a + Y_{cd} \nabla_b Y^d{}_a$$

$$\nabla_c K_{ab} = \nabla_c Y_{ad} Y^d{}_b + Y_{ad} \nabla_c Y^d{}_b$$

avec $Y_{cd} \nabla_b Y^d{}_a = - Y_{dc} \nabla_b Y^d{}_a = - Y^d{}_c \nabla_b Y_{da} = - Y^d{}_c (- \nabla_a Y_{db}) =$

$$= - Y^d{}_c \nabla_a Y_{bd} = - \nabla_a Y_{bd} Y^d{}_c$$

$$\Rightarrow \nabla_a K_{bc} + \nabla_b K_{ca} + \nabla_c K_{ab} = 0$$

K_{ab} est donc bien un tenseur de Killing!

4 a) $p^a \nabla_a p^b = 0$ équation des géodésiques

0,5

b) $p^a \nabla_a K = p^a \nabla_a (K_{bc} p^b p^c) = \nabla_a K_{bc} p^a p^b p^c + K_{bc} \underbrace{p^a \nabla_a p^b}_{=0} p^c +$

1

$$+ K_{bc} \underbrace{p^a \nabla_a p^c}_{=0} p^b = \nabla_a K_{bc} p^a p^b p^c$$

Tous les indices sont muets $\Rightarrow$

$$\nabla_a K_{bc} p^a p^b p^c = \frac{1}{3} \left(\nabla_a K_{bc} p^a p^b p^c + \nabla_b K_{ca} p^b p^c p^a + \nabla_c K_{ab} p^c p^a p^b \right)$$

$$= \frac{1}{3} \underbrace{\left(\nabla_a K_{bc} + \nabla_b K_{ca} + \nabla_c K_{ab} \right)}_{0 \text{ (voir 2 b))}} p^a p^b p^c = 0$$

$$\Rightarrow p^a \nabla_a K = 0$$

c) $K_{ab} = g_{ab} \Rightarrow K = g_{ab} p^a p^b = - m^2$

0,5

conservation de la masse de la particule le long $\mathcal{L}$.

$$l^c = \frac{r^2+a^2}{\Delta}(\partial_t)^c + (\partial_r)^c + \frac{a}{\Delta}(\partial_\varphi)^c$$

$$K^c = \frac{r^2+a^2}{2\rho^2}(\partial_t)^c - \frac{\Delta}{2\rho^2}(\partial_r)^c + \frac{a}{2\rho^2}(\partial_\varphi)^c$$

$$K_{ab} = 2\rho^2 l_{(a}K_{b)} + r^2 g_{ab} \quad , \quad -p^a p_a \equiv \mu^2$$

5a)

1 $$l^a l_a = g_{ab} l^a l^b = g_{00}(l^0)^2 + 2g_{0\varphi} l^0 l^\varphi + g_{rr}(l^r)^2 + g_{\varphi\varphi}(l^\varphi)^2 =$$

$$= \left(-1 + \frac{2mr}{\rho^2}\right)\frac{(r^2+a^2)^2}{\Delta^2} - \frac{4amr\sin^2\vartheta}{\rho^2}\,\frac{r^2+a^2}{\Delta}\cdot\frac{a}{\Delta} +$$

$$+ \frac{\rho^2}{\Delta} + \left(r^2+a^2+\frac{2a^2mr\sin^2\vartheta}{\rho^2}\right)\sin^2\vartheta\,\frac{a^2}{\Delta^2} =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left\{-(r^2+a^2)^2 + \rho^2\Delta + a^2(r^2+a^2)\sin^2\vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{2mr}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)^2 - 2a^2(r^2+a^2)\sin^2\vartheta + a^4\sin^4\vartheta\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left\{(r^2+a^2)\underbrace{(-r^2-a^2+a^2\sin^2\vartheta)}_{\equiv -\rho^2} + \rho^2(r^2-2mr+a^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{2mr}{\rho^2}\left[r^4+2a^2r^2+a^4-2a^2r^2\sin^2\vartheta - 2a^4\sin^2\vartheta + a^4\sin^4\vartheta\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left[-2mr\rho^2 + \frac{2mr}{\rho^2}\underbrace{(r^2+a^2\cos^2\vartheta)^2}_{\rho^4}\right] = 0$$

$$K^a K_a = g_{ab}K^a K^b = g_{00}(K^0)^2 + 2g_{0\varphi}K^0K^\varphi + g_{rr}(K^r)^2 + g_{\varphi\varphi}(K^\varphi)^2$$

$$= \left(-1+\frac{2mr}{\rho^2}\right)\frac{(r^2+a^2)^2}{4\rho^4} - \frac{4amr\sin^2\vartheta}{\rho^2}\,\frac{r^2+a^2}{2\rho^2}\,\frac{a}{2\rho^2} + \frac{\rho^2}{\Delta}\left(-\frac{\Delta}{2\rho^2}\right)^2 +$$

$$+ \left(r^2+a^2+\frac{2a^2mr\sin^2\vartheta}{\rho^2}\right)\sin^2\vartheta\,\frac{a^2}{4\rho^4} = \frac{\Delta^2}{4\rho^4}\,l^a l_a = 0$$

b) $l^a k_a = g_{ab} l^a k^b = g_{00} l^0 k^0 + g_{0\varphi} l^0 k^\varphi + g_{\varphi 0} l^\varphi k^0 + g_{rr} l^r k^r + g_{\varphi\varphi} l^\varphi k^\varphi$

1

$$= \left(-1 + \frac{2mr}{\rho^2}\right) \frac{r^2+a^2}{\Delta} \frac{r^2+a^2}{2\rho^2} - \frac{2amr\sin^2\vartheta}{\rho^2} \left[\frac{r^2+a^2}{\Delta} \frac{a}{2\rho^2} + \frac{a}{\Delta} \frac{a}{2\rho^2} \right] +$$

$$+ \frac{\rho^2}{\Delta}\left(-\frac{\Delta}{2\rho^2}\right) + \left(r^2+a^2+ \frac{2a^2 mr\sin^2\vartheta}{\rho^2}\right) \sin^2\vartheta \frac{a}{\Delta}\frac{a}{2\rho^2}$$

$$= \frac{1}{2\rho^2\Delta} \left\{ \left[\left(-1 + \frac{2mr}{\rho^2}\right)(r^2+a^2)^2 - \frac{4a^2 mr\sin^2\vartheta}{\rho^2}(r^2+a^2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a^2\left(r^2+a^2+\frac{2a^2mr\sin^2\vartheta}{\rho^2}\right)\sin^2\vartheta \right] - \rho^2\Delta \right\}$$

Selon le calcul de $l^a l_a$, le terme entre crochets est égal à $-\rho^2\Delta \Rightarrow l^a k_a = -1$

6 a)

1 $K = K_{ab} p^a p^b = \rho^2 (l_a k_b p^a p^b + l_b k_a p^a p^b) + r^2 g_{ab} p^a p^b =$

$$= \rho^2 \cdot 2 \cdot l_a p^a \cdot k_b p^b + r^2 p^a p_a =$$

$$= \rho^2 \left[\frac{(r^2+a^2)^2}{\rho^2\Delta}(p_0)^2 + \frac{2a(r^2+a^2)}{\rho^2\Delta} p_0 p_\varphi - \frac{\Delta}{\rho^2}(p_r)^2 + \frac{a^2}{\rho^2\Delta}(p_\varphi)^2 \right] - \mu^2 r^2$$

$$= \rho^2 \left[\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} - g^{00}\right)(p_0)^2 + \frac{2a(r^2+a^2)}{\rho^2\Delta} p_0 p_\varphi - g^{rr}(p_r)^2 + \left(\frac{1}{\rho^2\sin^2\vartheta} - g^{\varphi\varphi}\right)(p_\varphi)^2 \right]$$

$$- \mu^2 r^2$$

En utilisant la norme de p^a : $p^a p_a = -\mu^2$ on a

$$-g^{00}(p_0)^2 - g^{rr}(p_r)^2 - g^{\varphi\varphi}(p_\varphi)^2 = \mu^2 + 2g^{0\varphi} p_0 p_\varphi + g^{\theta\theta}(p_\vartheta)^2$$

$$= \mu^2 - \frac{4amr}{\rho^2\Delta} p_0 p_\varphi + \frac{1}{\rho^2}(p_\vartheta)^2$$

$$\Rightarrow \quad K = (p_\vartheta)^2 + \mu^2 \underbrace{(\rho^2 - r^2)}_{= a^2\cos^2\vartheta} + a^2\sin^2\vartheta (p_0)^2 + \frac{2a}{\Delta} \underbrace{(r^2+a^2-2mr)}_{=\Delta} p_0 p_\varphi + \frac{(p_\varphi)^2}{\sin^2\vartheta}$$

avec $a^2 \sin^2\vartheta (p_0^2) = a^2(1-\cos^2\vartheta)(p_0)^2$

$$K = (p_\vartheta)^2 + \cos^2\vartheta\left[a^2(\mu^2 - p_0^2) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\right] + (p_\varphi + a p_0)^2$$

b) $\mu = 0 \Rightarrow$ particule de masse nulle, comme le photon

0,5

7 a) Puisque ξ^a et η^a sont des vecteurs de Killing,

0,5 E et L sont des constantes de mouvement le long de géodésiques.

b) $E = -\xi^a p_a = -\delta^\alpha_0 p_\alpha = -p_0$, $L = \eta^a p_a = \delta^\alpha_\varphi p_\alpha = p_\varphi$

0,5 $\Rightarrow p_\varphi + a p_0 = L - aE$ est constant.

Comme $K = Q + (p_\varphi + a p_0)^2$ est constante de mouvement, c'est aussi le cas pour Q.

Problème 4

1) $ds^2 = -v^2 du^2 + dv^2$

1,5 $g_{ij} = \begin{pmatrix} -v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad g^{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab})$$

$$\Gamma^u{}_{vu} = \frac{1}{2} g^{uu} \partial_v g_{uu} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{v^2}\right)(-2v) = \frac{1}{v} = \Gamma^u{}_{uv}$$

$$\Gamma^v{}_{uu} = \dots = v$$

$$\Gamma^u{}_{uu} = \Gamma^v{}_{vv} = \Gamma^v{}_{vu} = \Gamma^v{}_{uv} = 0$$

$$R_{vuvu} = g_{vv} R^v{}_{uvu} = R^v{}_{uvu} = \dots = 0$$

2) Le tenseur de Riemann a $\frac{1}{12} n^2(n^2-1)$ composantes indépendantes
0,5 dans n dimensions. Pour $n=2$, il y a 1 seule composante.
$\Rightarrow$ Comme $R^v{}_{uvu}$ est 0, il s'agit d'un espace-temps plat.

3) en analogie avec coordonnées polaires:
1

$x = v \cosh u$ $\qquad$ $x^2 - t^2 = v^2$
$t = v \sinh u$ $\qquad$ $x/t = \coth u$

$\Rightarrow$ $dx^2 = (dv \cosh u + du\, v \sinh u)^2$
$dt^2 = (dv \sinh u + du\, v \cosh u)^2$

$$dx^2 - dt^2 = dv^2 - v^2 du^2$$