# Corrigé Examen EL3 : Gravitation Relativiste

Année 2017 - 2018

## 1. GW 150914

① a) Dans l'approximation newtonienne, les trous noirs (qui sont des objets compacts) sont assimilés à des particules ponctuelles se déplaçant dans l'espace euclidien tri-dimensionnel.

À l'instant $t$, la densité de masse est donc nulle partout, sauf aux points $\vec{x}_1(t)$ et $\vec{x}_2(t)$ où se trouvent concentrées les masses $m_1$ et $m_2$ des deux trous noirs. On en déduit que

$$\boxed{\rho(t,\vec{x}) = m_1\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_1(t)) + m_2\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_2(t))}$$

b) En utilisant les propriétés élémentaires de la distribution de Dirac, il vient immédiatement

$$m(t) = \int \rho(t,\vec{x})\,d^3x = m_1 \underbrace{\int \delta(\vec{x}-\vec{x}_1(t))\,d^3x}_{=1} + m_2 \underbrace{\int \delta(\vec{x}-\vec{x}_2(t))\,d^3x}_{=1}$$

$\Downarrow$

$\boxed{m(t) = m_1 + m_2 \equiv m}$ est constante

c) Si $d = \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$ est la distance relative entre les deux corps et $\omega = 2\pi/T$ la vitesse angulaire associée à la période $T$ de l'orbite circulaire, alors d'après la troisième loi de Kepler

$$\boxed{\omega^2 d^3 = m} \qquad (G = 1)$$

2) a) On remarque que

$$Q_{ij}(t) = \int \rho(t,\vec{x}) \left( x^i x^j - \frac{1}{3} \|\vec{x}\|^2 \delta^{ij} \right) d^3x$$

$$= \underbrace{\int \rho(t,\vec{x})\, x^i x^j \, d^3x}_{= I_{ij}(t)} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \underbrace{\int \rho(t,\vec{x}) \|\vec{x}\|^2 d^3x}_{= I(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Q_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} I \delta^{ij}}$$

Le moment quadrupolaire newtonien est la partie sans trace du tenseur d'inertie newtonien. En effet,

$$Q = \delta^{ij} Q_{ij} = \underbrace{\delta^{ij} I_{ij}}_{I} - \frac{1}{3} I \underbrace{\delta^{ij} \delta^{ij}}_{= 3} = 0$$

b) Lorsque la densité de masse newtonienne prend la forme $\rho(t,\vec{x}) = m_1\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_1(t)) + m_2\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_2(t))$, il vient

$$I_{ij}(t) = \int \rho(t,\vec{x})\, x^i x^j\, d^3x$$

$$= m_1 \underbrace{\int \delta(\vec{x}-\vec{x}_1(t))\, x^i x^j\, d^3x}_{=\; x_1^i(t)\, x_1^j(t)} + (1 \to 2)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_{ij}(t) = m_1\, x_1^i(t)\, x_1^j(t) + m_2\, x_2^i(t)\, x_2^j(t)}$$

c) Le moment cinétique (orbital) étant conservé, <u>le mouvement est plan</u>, de sorte que l'on peut toujours orienter le repère cartésien de sorte que le mouvement orbital ait lieu dans le plan $z = 0$.

Par ailleurs, en plaçant l'origine du repère au <u>barycentre de masse</u>, tel que $m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 = \vec{0}$, et en choisissant la <u>phase à l'origine</u> de sorte que $\vec{x}_1(t=0)$ soit colinéaire avec le vecteur unitaire $\vec{e}_x$, les trajectoires des trous noirs sont données par

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \frac{m_2}{m}\, d\,(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \\ \vec{x}_2(t) &= -\frac{m_1}{m}\, d\,(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \end{aligned}}$$

En particulier, on peut vérifier que $m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 = \vec{0}$ et que $\| \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \| = d$.

d) Un simple calcul montre que

$$I_{ij}(t) = m_1 x_1^i(t) x_1^j(t) + m_2 x_2^i(t) x_2^j(t)$$

$$= \left[ m_1 \left(\frac{m_2}{m}\right)^2 d^2 + m_2 \left(-\frac{m_1}{m}\right)^2 d^2 \right] \times$$

$$(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \otimes (\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$$

$$= d^2 \underbrace{\frac{\mu}{m}}_{m_1 m_2 / m} \underbrace{(m_2 + m_1)}_{= m} \begin{pmatrix} \cos^2\omega t & \cos\omega t \sin\omega t & 0 \\ \cos\omega t \sin\omega t & \sin^2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_{ij}(t) = \frac{\mu}{2} d^2 \begin{pmatrix} 1+\cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & 1-\cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

On en déduit que $I = \delta^{ij} I_{ij} = \mu d^2$.

En utilisant la relation générale $Q_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} I$ il vient donc

$$\boxed{Q_{ij}(t) = \frac{\mu}{2} d^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & \frac{1}{3} - \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

③ a) D'après la première formule du quadrupole d'Einstein,

$$\bar{h}_{ij}(t,\vec{x}) = \frac{2}{r} \ddot{I}_{ij}(t_{ret}) \quad \text{où} \quad t_{ret} \equiv t - r.$$

En dérivant deux fois par rapport au temps le tenseur d'inertie $I_{ij}(t)$ calculé dans la question ② d), il vient immédiatement

$$\ddot{I}_{ij}(t) = \frac{\mu}{2} d^2 (2\omega)^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\omega t & -\sin 2\omega t & 0 \\ -\sin 2\omega t & +\cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent on trouve bien

$$\boxed{\bar{h}_{ij}(t,\vec{x}) = \frac{4\mu}{r} d^2 \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos(2\omega t_{ret}) & -\sin(2\omega t_{ret}) & 0 \\ -\sin(2\omega t_{ret}) & +\cos(2\omega t_{ret}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Puisque les termes sinusoïdaux oscillent entre $-1$ et $+1$, l'amplitude caractéristique $h$ des ondes gravitationnelles émises vaut

$$h = \frac{4\mu}{r} d^2 \omega^2 .$$

En utilisant la troisième loi de Kepler, $\omega^2 = m/d^3$, il vient donc

$$\boxed{h = \frac{4\,\mu m}{r\, d}} .$$

c) D'après la seconde formule du quadrupole d'Einstein,

$$L = \frac{1}{5} \left\langle \dddot{Q}_{ij} \, \dddot{Q}_{ij} \right\rangle .$$

En dérivant trois fois par rapport au temps le moment quadrupolaire $Q_{ij}(t)$ calculé dans la question ② d), il vient immédiatement

$$\dddot{Q}_{ij}(t) = \frac{\mu}{2} d^2 (2\omega)^3 \begin{pmatrix} +\sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ -\cos 2\omega t & -\sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{5} \left\langle \dddot{Q}_{xx} \dddot{Q}_{xx} + \dddot{Q}_{yy} \dddot{Q}_{yy} + 2 \dddot{Q}_{xy} \dddot{Q}_{xy} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 d^4 (2\omega)^6 \langle \underbrace{\sin^2(2\omega t) + \sin^2(2\omega t) + 2\cos^2(2\omega t)}_{= 2} \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{32}{5} \mu^2 d^4 \omega^6 = \frac{32}{5} \frac{\mu^2 m^3}{d^5}}$$

où l'on a utilisé la 3e loi de Kepler dans la dernière égalité

(4) a) Sachant que la conservation de l'énergie implique

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{L}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} E = -\dfrac{\mu m}{2d} \\ \mathcal{L} = \dfrac{32}{5} \dfrac{\mu^2 m^3}{d^5}, \end{cases}$$

on en déduit

$$\frac{\mu m}{2} \frac{\dot{d}}{d^2} = -\frac{32}{5} \frac{\mu^2 m^3}{d^5}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{d} = -\frac{64}{5} \frac{\mu m^2}{d^3}}$$

b) D'après la formule (8), la fréquence $f$ des ondes gravitationnelles est reliée à la vitesse angulaire $\omega$ de l'orbite par

$$2\pi f = 2\omega \implies \boxed{f = \frac{\omega}{\pi}}$$

c) Cette dernière relation implique $\dfrac{\dot f}{f} = \dfrac{\dot\omega}{\omega}$.

D'autre part, la 3° loi de Kepler implique $2\dfrac{\dot\omega}{\omega} + 3\dfrac{\dot d}{d} = 0$

D'où l'on déduit

$$\frac{\dot f}{f} = -\frac{3}{2}\frac{\dot d}{d} = \frac{96}{5}\frac{\mu m^2}{d^4} = \frac{96}{5}\mu m^2 \frac{\omega^{8/3}}{m^{4/3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot f = \frac{96}{5}\pi^{8/3}\mathcal{M} f^{11/3}} \quad \text{où} \quad \boxed{\mathcal{M} = \mu m^{2/3} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{1/3}}}$$

<u>CORRECTIF</u> : une coquille s'est glissée dans l'énoncé.

Il convient de remplacer $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M}^{5/3}$ dans la formule (13), de sorte que $\mathcal{M} = \dfrac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1+m_2)^{1/5}}$, qui a bien les dimensions d'une masse.

Il s'agit de la masse dite de gazouilli, ou « chirp mass » en anglais.

d) De la formule (13) on déduit

$$\frac{df}{f^{11/3}} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \mathcal{M}\, dt,$$

qui s'intègre de sorte que

$$-\frac{3}{8} f^{-8/3} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \mathcal{M} \,(t - t_c),$$

où $t_c$ est une constante d'intégration. Ainsi

$$\boxed{f \propto (t_c - t)^{-3/8}}$$

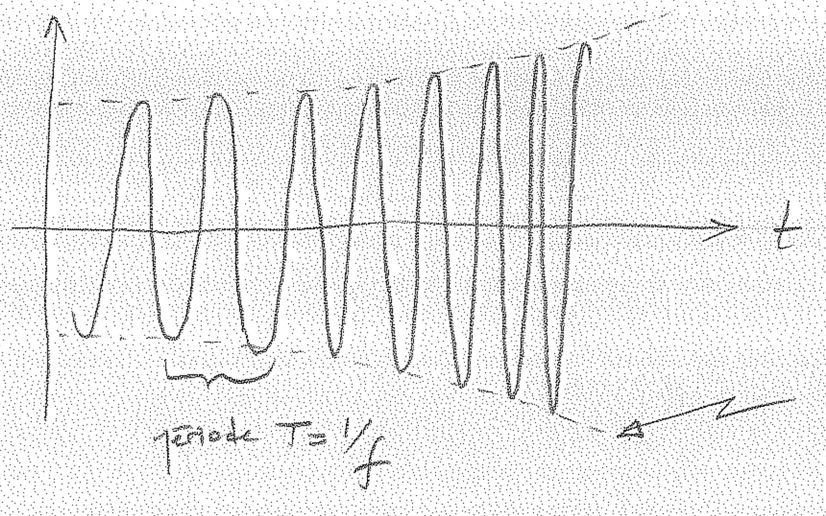
D'autre part, la formule (9) implique

$$h = \frac{4\mu m}{r} \frac{1}{d} \propto \omega^{2/3} \propto f^{2/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{h \propto (t_c - t)^{-1/4}}$$

La constante d'intégration $t_c$ s'interprète formellement comme l'instant de coalescence du système binaire, lorsque la vitesse angulaire $\omega = \pi f$ de l'orbite diverge, ou de manière équivalente lorsque la distance orbitale $d \propto \omega^{-2/3}$ s'annule. En pratique, nos formules « newtoniennes » cessent d'être valable bien avant que le système n'ai évolué jusqu'à l'approche de la coalescence.

e)




Au fur et à mesure que l'énergie mécanique $E$ du système binaire décroît, du fait de l'émission de rayonnement gravitationnel, la distance orbitale $d \propto -1/E$ décroît en conséquence, de sorte que la vitesse angulaire $\omega \propto d^{-3/2}$ de l'orbite et la fréquence $f = \omega/\pi$ des ondes gravitationnelles augmentent. D'autre part, l'amplitude caractéristique $h \propto 1/d$ des ondes émises augmente car le champ gravitationnel dynamique généré par le système binaire devient plus « intense ».

f) Si $m_1 \simeq m_2 \simeq \frac{m}{2}$ alors $\mathcal{M} \simeq \frac{m^{5/3}}{4}$, de sorte que

$$\boxed{\frac{\dot{f}}{f^{11/3}} \simeq \frac{24}{5}\pi^{8/3} m^{5/3}}$$

En mesurant l'évolution temporelle de la fréquence de l'onde gravitationnelle, $f(t)$, il est possible de déterminer $\dot{f}/f^{11/3}$ et ainsi d'en déduire la masse totale $m$ du système.

D'autre part, lorsque $m_1 \simeq m_2 \simeq \frac{m}{2}$, on a $\mu \simeq \frac{1}{4}$, de sorte que la formule (9) implique

$$\boxed{d(t)\, h(t) \simeq \frac{m}{r}}.$$

Or d'après les réponses aux questions (4) b) et (4) c),

$$\frac{\dot{d}}{d} = -\frac{2}{3}\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{2}{3}\frac{\dot{f}}{f},$$

ce qui permet de mesurer $d(t)$ à partir de l'évolution temporelle de la fréquence $f(t)$. En mesurant l'évolution temporelle de l'amplitude caractéristique $h(t)$ des ondes, on peut ainsi mesurer le produit $d(t)\,h(t)$ et ainsi remonter à la distance $r$ de la source.

## 2. Plongeon dans un trou noir

(1) D'après l'équation du mouvement radiale d'une particule en orbite dans la métrique de Schwarzschild,

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 + \left(\frac{2M}{r} - 1\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad \text{où} \quad \begin{cases} E = \text{énergie par unité de masse} \\ L = \text{moment cinétique par unité de masse} \end{cases}$$

$$\geqslant \left(\frac{2M}{r} - 1\right)\underbrace{\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)}_{\geqslant 1}$$

Or $r \leq 2M \Rightarrow \frac{2M}{r} - 1 \geqslant 0$

Par conséquent

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \geqslant \frac{2M}{r} - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\frac{dr}{d\tau}\right| \geqslant \sqrt{\frac{2M}{r} - 1}}$$

(2) Entre $r = 2M$ et $r = 0$, le mouvement de chute libre est tel que $dr/d\tau < 0$, de sorte que

$$\left|\frac{dr}{d\tau}\right| = -\frac{dr}{d\tau}.$$

Par conséquent on obtient l'inégalité

$$\frac{dr}{d\tau} \leqslant -\sqrt{\frac{2M}{r} - 1} \quad \Leftrightarrow \quad d\tau \leqslant -\frac{\overbrace{dr}^{<0}}{\sqrt{\frac{2M}{r} - 1}}$$

Le temps propre écoulé entre $r = 2M$ et $r = 0$ est donc <u>maximal</u> lorsque

$$d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{\frac{2M}{r} - 1}}$$

En intégrant entre $r = 2M$ et $r = 0$ il vient

$$\Delta\tau_{max} = -\int_{2M}^{0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2M}{r} - 1}} = \int_{0}^{2M} \sqrt{\frac{r}{2M - r}}\, dr$$

$$= \left[2M \arcsin\sqrt{\frac{r}{2M}} - \sqrt{r(2M - r)}\right]_0^{2M}$$

On trouve donc finalement

$$\boxed{\Delta \tau_{max} = \pi M}$$

(3) En se souvenant que $\frac{GM}{c^2}$ est homogène à une longueur, la formule désirée est

$$\boxed{\Delta \tau_{max} = \pi \frac{GM}{c^3}}$$

On trouve ainsi $\Delta \tau_{max} = \begin{cases} 155\,\mu s & \text{pour } M = 10 M_\odot \\ 62\,s & \text{pour } M = 4 \times 10^6 M_\odot \end{cases}$

## 3. Coordonnées de Painlevé - Gullstrand

(1) En coordonnées de Schwarzschild $(t, r, \theta, \varphi)$, la métrique de Schwarzschild de masse $M$ est

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

En introduisant une nouvelle coordonnée temporelle $T(t, r)$ de sorte que

$$dT = dt + F(r)\, dr,$$

$$-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 dt^2 + dr^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2\left(dT - F(r)\,dr\right)^2 + dr^2$$

$$= -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 dT^2 + 2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 F(r)\,dT\,dr$$

$$+ dr^2\left[-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 F^2(r) + 1\right]$$

$$\Downarrow$$

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right) dT^2 + 2\left(1-\frac{2M}{r}\right) F(r)\,dT\,dr$$

$$+ \left[-\left(1-\frac{2M}{r}\right) F^2(r) + \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\right] dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

La métrique induite sur les hypersurfaces $T = \text{cst}$ prend donc la forme

$$ds^2\Big|_{T=\text{cst}} = \left[-\left(1-\frac{2M}{r}\right) F^2(r) + \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\right] dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

Cette métrique est (spacialement) plate à condition que

$$\boxed{-\left(1-\frac{2M}{r}\right) F^2(r) + \frac{1}{1-\frac{2M}{r}} = 1}$$

En effet, on obtient alors la métrique de l'espace euclidien tridimentionnel exprimée en coordonnées sphériques usuelles $(r, \theta, \varphi)$.

Cette condition implique

$$F^2(r) = \frac{2M/r}{\left(1-2M/r\right)^2} \implies \boxed{F(r) = \pm\frac{\sqrt{2M/r}}{1-2M/r}}$$

La métrique de Schwarzschild prend alors la forme

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dT^2 \pm 2\sqrt{\frac{2M}{r}}\,dT\,dr + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}$$

Les composantes $g_{\alpha\beta}$ de la métrique de Schwarzschild en coordonnées $(x^\alpha) = (T, r, \theta, \varphi)$ sont toutes régulières en $r = 2M$.

De plus, le déterminant est non nul,

$$\det(g_{\alpha\beta})\big|_{r=2M} = -r^4\sin^2\theta\big|_{r=2M} = (2M)^4\sin^2\theta \neq 0,$$

de sorte que la métrique est non dégénérée.

La métrique de Schwarzschild exprimée dans les coordonnées $(T, r, \theta, \varphi)$ peut donc être étendue à travers l'hypersurface $r = 2M$.

(3) Les deux choix de signe pour $F(r) = \pm \dfrac{\sqrt{2M/r}}{1-2M/r}$ correspondent à deux systèmes de coordonnées (dits de Gullstrand-Painlevé) différents, de type « entrant » et « sortant », de manière semblable aux coordonnées d'Eddington-Finkelstein vues en cours.

# 4. Cosmologie anisotrope

(1) Les fonctions $a_x(t)$, $a_y(t)$ et $a_z(t)$ s'interprètent physiquement comme des facteur d'échelle associés respectivement à l'expansion (ou la contraction) de l'espace-temps dans les trois directions spatiales $x$, $y$ et $z$.

(2) Par rapport aux coordonnées $(x^\alpha) = (t, x, y, z)$, les composantes de la métrique sont données par

$$(g_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(-1, a_x^2, a_y^2, a_z^2).$$

Puisque cette métrique est diagonale, les composantes de la métrique inverse sont données par

$$(g^{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(-1, 1/a_x^2, 1/a_y^2, 1/a_z^2).$$

Les composantes du symbole de Christoffel $\Gamma^c{}_{ab}$ associées à la métrique (18) par rapport aux coordonnées $(x^\alpha)$ valent alors

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta}\right)$$

- $$\Gamma^t{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{tt}\left(\cancel{\frac{\partial g_{t\beta}}{\partial x^\alpha}} + \cancel{\frac{\partial g_{\alpha t}}{\partial x^\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{d g_{\alpha\beta}}{dt}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\Gamma^t{}_{xx} = a_x \dot{a}_x}, \quad \boxed{\Gamma^t{}_{yy} = a_y \dot{a}_y}, \quad \boxed{\Gamma^t{}_{zz} = a_z \dot{a}_z}$$

- $\Gamma^x{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{xx} \left( \frac{\partial g_{x\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha x}}{\partial x^\beta} - \cancel{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x}} \right)$

Non nul si et seulement si $(\alpha,\beta) = (t,x)$ ou $(\alpha,\beta) = (x,t)$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma^x{}_{tx} = \Gamma^x{}_{xt} = \frac{\dot{a}_x}{a_x}}$$

- De la même façon $\boxed{\Gamma^y{}_{ty} = \Gamma^y{}_{yt} = \frac{\dot{a}_y}{a_y}}$

$$\boxed{\Gamma^z{}_{tz} = \Gamma^z{}_{zt} = \frac{\dot{a}_z}{a_z}}$$

Toutes les autres composantes sont nulles.

3. a) Si $x^\alpha = X^\alpha(\tau)$ est l'équation paramétrique de la ligne d'univers de la particule en chute libre, alors les composantes de sa quadrivitesse valent

$$\boxed{u^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\tau}}$$

b) Puisque la particule est en <u>chute libre</u>, sa quadrivitesse obéit à l'<u>équation des géodésiques</u> :

$$\boxed{u^a \nabla_a u^b = 0}$$

c) En composantes, cette équation prend la forme

$$\boxed{\frac{d^2X^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dX^\gamma}{d\tau}\frac{dX^\beta}{d\tau} = 0},$$

où les composantes non nulles du symbole de Christoffel ont été calculées dans la question ②.

En utilisant l'abus de notation $X^t = t$, $X^x = x$, $X^y = y$ et $X^z = z$ il vient donc

$$(*) \begin{cases} \dfrac{d^2t}{d\tau^2} + a_x\dot{a}_x\left(\dfrac{dx}{d\tau}\right)^2 + a_y\dot{a}_y\left(\dfrac{dy}{d\tau}\right)^2 + a_z\dot{a}_z\left(\dfrac{dz}{d\tau}\right)^2 = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2x}{d\tau^2} + 2\,\dfrac{\dot{a}_x}{a_x}\dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{dx}{d\tau} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{d\tau^2} + 2\,\dfrac{\dot{a}_y}{a_y}\dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{dy}{d\tau} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2z}{d\tau^2} + 2\,\dfrac{\dot{a}_z}{a_z}\dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{dz}{d\tau} = 0 \end{cases}$$

d) La ligne d'univers d'un observateur immobile par rapport aux coordonnées $(x^\alpha)$ est telle que

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 = \text{cst} \\ y(\tau) = y_0 = \text{cst} \\ z(\tau) = z_0 = \text{cst} \\ t(\tau) = \alpha_0\tau + \beta_0 \quad \text{où } (\alpha_0, \beta_0) \text{ sont des constantes} \end{cases}$$

Ceci implique

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \dfrac{dy}{d\tau} = \dfrac{dz}{d\tau} = 0 \\[2ex] \dfrac{dt}{d\tau} = \alpha_0 = \text{cst} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\tau^2} = \dfrac{d^2y}{d\tau^2} = \dfrac{d^2z}{d\tau^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \end{cases}$$

Une telle ligne d'univers vérifie donc les équations (*).
On en conclu que la ligne d'univers d'un observateur immobile par rapport aux coordonnées $(x^a)$ est une <u>géodésique</u> (du genre temps).

(4) L'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion prend la forme

$$\nabla_a T^{ab} = 0$$

où $T^{ab} = (\rho + p) u^a u^b + p g^{ab}$ pour un fluide parfait.
On en déduit

$$0 = (\rho + p) u^b \nabla_a u^a + \overbrace{u^a \nabla_a \left[(\rho+p) u^b\right]}^{= (\rho+p) u^a \nabla_a u^b + u^b u^a \nabla_a (\rho+p)} + p \cancel{\nabla_a g^{ab}} + g^{ab} \nabla_a p$$

En contractant avec la quadrivitesse et en utilisant la condition de normalisation $u_b u^b = -1$, qui implique $u_b \nabla_a u^b = 0$, il vient

$$0 = -(\rho + p) \nabla_a u^a - u^a \nabla_a (\rho + \cancel{p}) + \cancel{u_b \nabla^b p}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{d\tau} + (\rho + p) \nabla_a u^a = 0}$$

Or $\nabla_a u^a = \nabla_\alpha u^\alpha = \cancel{\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} u^\beta = \Gamma^\alpha_{\alpha t} u^t$

car les composantes de la quadrivitesse par rapport aux coordonnées $(x^\alpha)$ valent simplement $u^\alpha = (1,0,0,0)$. Ainsi,

$$\nabla_a u^a = (\Gamma^x{}_{xt} + \Gamma^y{}_{yt} + \Gamma^z{}_{zt}) \frac{dt}{d\tau}$$

$$= \left(\frac{\dot a_x}{a_x} + \frac{\dot a_y}{a_y} + \frac{\dot a_z}{a_z}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$= \frac{d}{dt}\ln(\dot a_x a_y a_z)\frac{dt}{d\tau}$$

Finalement, on trouve donc

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{H = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\ln(a_x a_y a_z)}$$

5) a) L'équation d'état $\underline{p = 0}$ correspond à un <u>fluide de poussière</u>

L'équation d'état $\underline{p = \frac{1}{3}\rho}$ correspond à un <u>fluide de radiation</u>.

<u>b)</u> Si $p = 0$ alors $\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d}{dt}\ln(a_x a_y a_z) = 0$

$\hookrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -d\ln(a_x a_y a_z)$

$\hookrightarrow d\ln(\rho a_x a_y a_z) = 0$

$\hookrightarrow \boxed{\rho = \frac{\rho_0}{a_x a_y a_z}}$ où $\rho_0$ est une constante.

Si $p = \frac{1}{3}\rho$ alors $\frac{d\rho}{dt} + \frac{4}{3}\rho \frac{d}{dt}\ln(a_x a_y a_z) = 0$

$\hookrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{4}{3}\, d\ln(a_x a_y a_z)$

$\hookrightarrow d\ln\left[\rho^3 (a_x a_y a_z)^4\right] = 0$

$\hookrightarrow \boxed{\rho = \frac{\rho_0}{(a_x a_y a_z)^{4/3}}}$ où $\rho_0$ est une constante

c) Lorsque $a_x = a_y = a_z \equiv a$, $a_x a_y a_z = a^3$, de sorte que

- $p = 0 \implies \boxed{\rho = \frac{\rho_0}{a^3}}$
- $p = \frac{\rho}{3} \implies \boxed{\rho = \frac{\rho_0}{a^4}}$

On retrouve les expressions des densité d'énergie d'un fluide de poussière et d'un fluide de radiation en fonction du facteur d'échelle $a(t)$ d'un univers homogène et isotrope de courbure nulle.