Corrigé Examen EL3 : Gravitation Relativité

Année 2016 - 2017

1. Effet de précession géodétique

Quadrivitesse u^a tangente à la ligne d'univers $\mathcal{L}$ obéissant à $u^a \nabla_a u^b = 0$. Vecteur s^a du genre espace ~~obéissant~~ à $u^a \nabla_a s^b = 0$.

① Puisque la quadrivitesse u^a obéit à l'équation des géodésiques, la ligne d'univers $\mathcal{L}$ est une géodésique du genre temps.

Le vecteur s^a est transporté parallèlement le long de $\mathcal{L}$.

② a)

$$u^c \nabla_c u^2 = u^c \nabla_c (g_{ab} u^a u^b)$$

$$= \underbrace{u^c \cancel{(\nabla_c g_{ab})}}_{\text{cond. de compatibilité métrique}} u^a u^b + g_{ab} \left[\overbrace{\cancel{(u^c \nabla_c u^a)}}^{\text{éq. des géodésiques}} u^b + u^a \overbrace{\cancel{(u^c \nabla_c u^b)}}^{\text{éq. des géodésiques}} \right]$$

$$= 0$$

La norme $u^2 = g_{ab} u^a u^b$ de la quadrivitesse u^a est bien conservée le long de $\mathcal{L}$.

De la même façon,

$$u^c \nabla_c s_*^2 = u^c \nabla_c (g_{ab} s^a s^b)$$

$$= u^c (\cancel{\nabla_c g_{ab}}) s^a s^b + g_{ab} \Big[\underbrace{\cancel{(u^c \nabla_c s^a)}}_{\text{éq. du transport } //} s^b + s^a \underbrace{\cancel{(u^c \nabla_c s^b)}}_{\text{éq. du transport } //} \Big]$$

$$= 0$$

La norme $s_*^2 \equiv g_{ab} s^a s^b$ du vecteur s^a est également conservée le long de $\mathcal{L}$.

b) La quadrivitesse est un <u>vecteur unitaire</u>, tel que $\boxed{u^2 = -1}$.

Le vecteur s^a est du <u>genre espace</u>, de sorte que $\boxed{s_*^2 > 0}$.

c) $$u^c \nabla_c (u \cdot s) = u^c \nabla_c (g_{ab} u^a s^b)$$

$$= u^c (\cancel{\nabla_c g_{ab}}) u^a s^b + g_{ab} \Big[\cancel{(u^c \nabla_c u^a)} s^b + u^a \cancel{(u^c \nabla_c s^b)} \Big]$$

$$= 0$$

Le produit scalaire $u \cdot s \equiv g_{ab} u^a s^b$ est conservé le long de $\mathcal{L}$.

d) Puisque s^a appartient à l'espace local de repos du gyroscope, ce vecteur est orthogonal à la quadrivitesse u^a du gyroscope, de sorte que

$\boxed{u \cdot s = 0}$.

(3) a) D'après le théorème de Birkhoff, la métrique à l'extérieur d'un corps à symétrie sphérique de masse M est la métrique de Schwarzschild de masse M.
En coordonnées de Schwarzschild $(x^\alpha) = (t, r, \theta, \varphi)$, celle-ci a pour expression

$$\boxed{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}$$

b) Les composantes $g_{\alpha\beta}$ de la métrique de Schwarzschild en coordonnées de Schwarzschild (x^α) ne dépendent ni de t, ni de φ.
L'espace-temps de Schwarzschild est donc stationnaire et axisymétrique. De fait, la métrique de Schwarzschild est même statique et à symétrique sphérique.

Les champs de vecteurs $\xi^a = (\partial_t)^a$ et $\eta^a = (\partial_\varphi)^a$ sont donc des (champs de) vecteurs de Killing. Ils vérifient donc l'équation de Killing :

$$\boxed{\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\nabla_{(a}\eta_{b)} = 0}$$

(4) a) En raison de la symétrie sphérique de la métrique de Schwarzschild, l'orbite d'une particule d'épreuve est nécessairement planaire. Par un changement adéquat de système de coordonnées (une rotation), on peut donc toujours se ramener au cas d'une orbite dont la coordonnée polaire vaut $\theta = \pi/2$.

La composante de la quadrivitesse associée au mouvement polaire est alors nulle : $\boxed{u^\theta = 0}$.

b) De manière générale,

$$\boxed{u^a = u^t(\partial_t)^a + u^r(\partial_r)^a + u^\theta(\partial_\theta)^a + u^\varphi(\partial_\varphi)^a}$$

composantes du vecteur u^a par rapport aux coordonnées (x^α)

éléments de la base naturelle associée aux coordonnées $(x^\alpha) = (t, r, \theta, \varphi)$

Pour une orbite circulaire, $r = R = \text{cst.}$, de sorte que $u^r = 0$. Puisque $u^\theta = 0$, il vient

$$u^a = u^t \xi^a + u^\varphi \eta^a \longrightarrow \boxed{u^a = u^t(\xi^a + \Omega\, \eta^a)}$$

où $\boxed{\Omega = u^\varphi / u^t}$

La grandeur $\Omega = \frac{u^\varphi}{u^t} = \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$ s'interprète comme la <u>vitesse angulaire de l'orbite</u>, telle que mesurée par un observateur distant statique.

c) La quadrivitesse u^a vérifie la condition de normalisation

$$-1 = u^2 = g_{ab}u^a u^b = (u^t)^2\left[g_{ab}\xi^a\xi^b + 2\Omega\, g_{ab}\xi^a\eta^b + \Omega^2 g_{ab}\eta^a\eta^b\right]$$

$$\downarrow$$

$$-1 = (u^t)^2\Big[\underbrace{g_{\alpha\beta}(\partial_t)^\alpha(\partial_t)^\beta}_{=\,g_{00}} + 2\Omega\underbrace{g_{\alpha\beta}(\partial_t)^\alpha(\partial_\varphi)^\beta}_{=\,\cancel{g_{0\varphi}}} + \Omega^2\underbrace{g_{\alpha\beta}(\partial_\varphi)^\alpha(\partial_\varphi)^\beta}_{=\,g_{\varphi\varphi}}\Big]$$

$$\left\{\begin{array}{l} r = R \\ \theta = \pi/2 \end{array}\right.$$

$$\downarrow$$

$$-1 = (u^t)^2\left[-1 + \frac{2M}{R} + \Omega^2 R^2\right]$$

$$\downarrow$$

$$(u^t)^2 = \left(1 - \frac{2M}{R} - \Omega^2R^2\right)^{-1}$$

Or on se souvient que $R^3\Omega^2 = M$. Par conséquent $\Omega^2R^2 = M/R$ et il vient

$$\boxed{u^t = \left(1 - \frac{3M}{R}\right)^{-1/2}}$$

5) a) Tout comme pour la quadrivitesse, on a

$$\boxed{s^a = s^t(\partial_t)^a + s^r(\partial_r)^a + s^\theta(\partial_\theta)^a + s^\varphi(\partial_\varphi)^a}$$

Puisque la direction du gyroscope pointe dans le plan orbital, on a $\boxed{s^\theta = 0}$.

b) L'orthogonalité de u^a et de s^a implique

$$0 = g_{ab}u^a s^b = g_{\alpha\beta}u^\alpha s^\beta = g_{0\beta}u^t s^\beta + g_{\varphi\beta}u^\varphi s^\beta$$

$$= u^t\left(g_{0\beta}s^\beta + \Omega g_{\varphi\beta}s^\beta\right)$$

$$= u^t\left(g_{00}s^t + \Omega g_{\varphi\varphi}s^\varphi\right) \quad \text{car } (g_{\alpha\beta}) \text{ est diagonale}$$

$$\downarrow$$

$$0 = -\left(1-\frac{2M}{R}\right)s^t + \Omega R^2 s^\varphi$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{s^t = R^2\Omega\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}s^\varphi}$$

Ainsi, une fois la composante s^φ connue, la composante s^t l'est également.

(6) a) En coordonnées de Schwarzschild (x^α), les composantes de l'équation du transport parallèle du vecteur s^α le long de $\mathscr{L}$ prennent la forme

$$0 = u^\alpha \nabla_\alpha s^\beta = \underbrace{u^\alpha \partial_\alpha s^\beta}_{= \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{\partial s^\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{ds^\beta}{d\tau}} + u^\alpha \Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} s^\gamma$$

$$\boxed{\frac{ds^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} u^\beta s^\gamma = 0}$$

- Composante $\alpha = r$:

$$\frac{ds^r}{d\tau} = - \Gamma^r{}_{\beta\gamma} u^\beta s^\gamma$$

$$= - \Gamma^r{}_{t\gamma} u^t s^\gamma - \Gamma^r{}_{\varphi\gamma} u^\varphi s^\gamma \quad (\text{car } u^r = 0 \text{ et } u^\theta = 0)$$

$$= - \Gamma^r{}_{tt} u^t s^t - \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} u^\varphi s^\varphi \quad (\text{car les autres composantes de } \Gamma^r{}_{t\gamma} \text{ et } \Gamma^r{}_{\varphi\gamma} \text{ sont nulles})$$

$$= - u^t \left[\Gamma^r{}_{tt} R^2 \Omega \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} s^\varphi + \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} \Omega s^\varphi \right]$$

$$\frac{ds^r}{dt} = \frac{ds^r}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{u^t}\frac{ds^r}{d\tau} = - \left[\underbrace{\Gamma^r{}_{tt}}_{= \frac{M}{\cancel{R^2}}\cancel{\left(1-\frac{2M}{R}\right)}} \cancel{R^2} \Omega \cancel{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1}} + \underbrace{\Gamma^r{}_{\varphi\varphi}}_{= -(R-2M)} \Omega \right] s^\varphi$$

$$\boxed{\frac{ds^r}{dt} = \Omega (R - 3M) s^\varphi}$$

- Composante $\alpha = \varphi$:

$$\frac{ds^\varphi}{d\tau} = -\Gamma^\varphi{}_{\beta\gamma}\, u^\beta s^\gamma$$

$$= -\cancel{\Gamma^\varphi{}_{t\gamma}\, u^t s^\gamma} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi\gamma}\, u^\varphi s^\gamma \quad (\text{car } u^r = 0 \text{ et } u^\theta = 0)$$

$$= -\cancel{\Gamma^\varphi{}_{\varphi t}\, u^\varphi s^t} - \underbrace{\Gamma^\varphi{}_{\varphi r}}_{= 1/R}\, u^\varphi s^r - \cancel{\Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi}}\, u^\varphi s^\varphi \quad (\text{car } s^\theta = 0)$$

$$= -\frac{1}{R} \times \Omega u^t \times s^r$$

$$\frac{ds^\varphi}{dt} = \frac{1}{u^t}\frac{ds^\varphi}{d\tau} = -\frac{\Omega}{R} s^r \longrightarrow \boxed{\frac{ds^\varphi}{dt} + \frac{\Omega}{R} s^r = 0}$$

b) $$\frac{d^2 s^\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds^\varphi}{dt}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\Omega}{R}}_{= \text{cst}} s^r\right) = -\frac{\Omega}{R}\underbrace{\frac{ds^r}{dt}}_{= \Omega(R-3M)s^\varphi}$$

$$\boxed{\frac{d^2 s^\varphi}{dt^2} + \omega_s^2 s^\varphi = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{\omega_s = \Omega\left(1 - \frac{3M}{R}\right)^{1/2}}$$

Il s'agit de l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle d'un <u>oscillateur harmonique</u> libre de <u>pulsation ω_s</u>.

c) La solution la plus générale à cette équation différentielle linéaire du second ordre est

$$s^\varphi(t) = A \sin(\omega_s t + \varphi_0) \quad \text{où } A \text{ et } \varphi_0 \text{ sont des constantes.}$$

En utilisant l'équation différentielle $\frac{ds^\varphi}{dt} + \frac{\Omega}{R} s^r = 0$, on en déduit

$$s^r(t) = -\frac{R}{\Omega}\frac{ds^\varphi}{dt} = -A\frac{R}{\Omega}\omega_s \cos(\omega_s t + \varphi_0)$$

Par ailleurs, puisqu'à l'instant initial $(t=0)$ le gyroscope pointe dans la direction radiale $(\partial_r)^a$, on a

$$s^\varphi(0) = A \sin\varphi_0 = 0 \implies \varphi_0 = 0\ [\pi] \quad \text{car } A \neq 0$$

$$\begin{cases} s^r(t) = +A\ R\left(1-\frac{3M}{R}\right)^{1/2} \cos(\omega_s t) \\ s^\varphi(t) = -A \sin(\omega_s t) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l}\text{on choisit } \varphi_0 = \pi \\ \text{de sorte que } s^r > 0 \\ \text{lorsque } t=0\end{array}\right)$$

Enfin, en utilisant la condition de normalisation pour s^a il vient

$$s_*^2 = g_{ab}s^a s^b = g_{\alpha\beta}s^\alpha s^\beta = g_{00}(s^t)^2 + g_{rr}(s^r)^2 + g_{\varphi\varphi}(s^\varphi)^2$$

$$= -\cancel{\left(1-\frac{2M}{R}\right)}\underbrace{R^4\Omega^2}_{=MR}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-\cancel{2}}(s^\varphi)^2 + \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}(s^r)^2 + R^2(s^\varphi)^2$$

$$= A^2\sin^2(\omega_s t)\left[R^2 - \frac{MR}{1-2M/R}\right] + \left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}A^2R^2\left(1-\frac{3M}{R}\right)\cos^2(\omega_s t)$$

$$S_*^2 = A^2 R^2 \, \frac{1 - 3M/R}{1 - 2M/R} \underbrace{\left(\sin^2(\omega_s t) + \cos^2(\omega_s t) \right)}_{=1}$$

$$\hookrightarrow \quad A = \frac{S_*}{R} \left(\frac{1 - 2M/R}{1 - 3M/R} \right)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} S^r(t) &= S_* \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \cos(\omega_s t) \\ R\, S^\varphi(t) &= - S_* \left(\frac{R - 2M}{R - 3M} \right)^{1/2} \sin(\omega_s t) \end{aligned}}$$

(7) a) L'angle $\psi(t)$ entre le vecteur S^a et la direction radiale $(\partial_r)^a$ est donné par la formule

$$\cos \psi(t) = \frac{S \cdot \partial_r}{\|S\| \, \|\partial_r\|} = \frac{g_{rr} S^r}{S_* \, g_{rr}^{1/2}} = \cos(\omega_s t)$$

Par conséquent, au cours d'une période orbitale, c'est-à-dire entre $t = 0$ et $t = 2\pi/\Omega$, cet angle a varié de

$$\boxed{\psi\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right) - \cancel{\psi(0)} = \omega_s \times \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \left(1 - \frac{3M}{R}\right)^{1/2}}$$

b) En soustrayant les 2π rads accumulés au cours d'une période orbitale du simple fait que la direction radiale $(\partial_r)^a$ varie le long de l'orbite, on en déduit qu'à chaque période orbitale, la direction du gyroscope accumule un angle de précession

$$\Delta\psi = \psi\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right) - 2\pi \longrightarrow \boxed{\Delta\psi = 2\pi\left(\sqrt{1-3M/R} - 1\right)}$$

c) Lorsque $R \gg M$, on peut écrire

$$\sqrt{1-3M/R} = 1 - \frac{3}{2}\frac{M}{R} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{R^2}\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\Delta\psi \simeq -3\pi\frac{M}{R}}$$

d) En restorant les facteurs de G et de c,

$$\boxed{\Delta\psi \simeq -3\pi\frac{GM_\oplus}{c^2(R_\oplus + h)}} \quad \text{où} \quad h = 640 \text{ km}$$

AN $\Delta\psi \simeq -5{,}95 \times 10^{-9}$ rad / orbite

$\simeq -6621$ mas / an

compatible avec la valeur mesurée par GPB

où l'on a utilisé pour la période orbitale $P = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_\oplus+h)^3}{GM_\oplus}} \simeq 1{,}623\,h$

2. Au voisinage du pôle

Métrique de la sphère unitaire en coordonnées sphériques $(x^\alpha) = (\theta, \varphi)$:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Changement de coordonnées $(\theta, \varphi) \longrightarrow (x, y)$ où

$$\begin{cases} x = \theta \cos\varphi \\ y = \theta \sin\varphi \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$

(1) Établissons quelques formules utiles :

$$x^2 + y^2 = \theta^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} \longrightarrow \boxed{\theta^2 = x^2 + y^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = (d\theta \cos\varphi - \theta \sin\varphi\, d\varphi)^2 + (d\theta \sin\varphi + \theta \cos\varphi\, d\varphi)^2$$

$$= d\theta^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \theta^2 \underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1} d\varphi^2$$

$$\boxed{d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2 = dx^2 + dy^2}$$

Ainsi $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 = d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2 + (\sin^2\theta - \theta^2)\, d\varphi^2$

$$= dx^2 + dy^2 + \left[\sin^2\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\right] d\varphi^2$$

car $\theta > 0$

Il reste à exprimer $d\varphi$ en fonction de x, y, dx et dy :

$$\begin{cases} dx = d\theta \cos\varphi - \theta \sin\varphi \, d\varphi = x \dfrac{d\theta}{\theta} - y \, d\varphi \\ dy = d\theta \sin\varphi + \theta \cos\varphi \, d\varphi = y \dfrac{d\theta}{\theta} + x \, d\varphi \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$x \, dy - y \, dx = \cancel{xy \frac{d\theta}{\theta}} + x^2 d\varphi - \cancel{xy \frac{d\theta}{\theta}} + y^2 d\varphi = (x^2+y^2) d\varphi$$

$$\downarrow$$

$$(d\varphi)^2 = \left(\frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx \right)^2$$

$$= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} dx^2 + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} dy^2 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dx \, dy$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 = \; & dx^2 \left[1 + \frac{y^2}{x^2+y^2} \left(\frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - 1 \right) \right] && \leftarrow g_{xx} \\ & + dy^2 \left[1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} \left(\frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - 1 \right) \right] && \leftarrow g_{yy} \\ & - \frac{2xy}{x^2+y^2} \left(\frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - 1 \right) dx \, dy && \leftarrow 2g_{xy} \end{aligned}}$$

(2) Un système de coordonnées <u>localement</u> inertielles en un point p est un système de coordonnées tel que

- $$g_{\alpha\beta}|_p = \begin{cases} \delta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(+1, \ldots, +1) & (\text{métrique riemannienne}) \\ \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, +1, \ldots, +1) & (\text{métrique Lorentzienne}) \end{cases}$$

- $$\left.\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}\right|_p = 0$$

Un système de coordonnées <u>globalement</u> inertielles est un système de coordonnées qui vérifie ces deux propriétés en <u>tout point p</u> de la variété d'espace(-~~temps~~), comme par exemple des coordonnées cartésiennes en espace plat (géométrie euclidienne).

(3) Lorsque $\theta \ll 1$, $x^2+y^2 = \theta^2 \ll 1$, de sorte que $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \mathcal{O}(\theta^5)$ et $\frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - 1 = \mathcal{O}(x^2+y^2)$. Ainsi,

$$\begin{cases} g_{xx} = 1 + \mathcal{O}(y^2) \\ g_{yy} = 1 + \mathcal{O}(x^2) \\ g_{xy} = g_{yx} = \mathcal{O}(xy) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g_{\alpha\beta}|_{\theta=0} = \mathrm{diag}(+1,+1) \\ \left.\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}\right|_{\theta=0} = 0 \end{cases}$$

Au voisinage du pôle, les coordonnées (x,y) centrées sur le pôle sont <u>localement cartésiennes</u>. En effet, la géométrie courbe de la surface d'une sphère est <u>localement plate</u> au voisinage de n'importe quel point.

3. Coordonnées isotropes

Métrique de Schwarzschild de masse M en coordonnées de Schwarzschild $(x^\alpha) = (t, r, \theta, \varphi)$:

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 d\Omega^2$$

Changement de coordonnées $(x^\alpha) \longrightarrow (\bar{x}^\alpha) = (t, \bar{r}, \theta, \varphi)$ où

$$r = \bar{r}\left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 \iff \bar{r} = \frac{1}{2}\left(r + \sqrt{r(r-2M)} - M\right)$$

pour tout $r > 2M \iff \bar{r} > \frac{M}{2}$.

① a) On dispose de l'expression de r en fonction de $\bar{r}$.
Il reste à exprimer dr en fonction de $\bar{r}$ et $d\bar{r}$:

$$\frac{dr}{d\bar{r}} = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 + \cancel{2}\bar{r}\left(-\frac{M}{\cancel{2}\bar{r}^2}\right)\left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)\left(1 + \frac{M}{2\bar{r}} - \frac{M}{\bar{r}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)\left(1 - \frac{M}{2\bar{r}}\right)$$

Par ailleurs,

$$1 - \frac{2M}{r} = \frac{1}{\cancel{\bar{r}}}\left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^{-2}\underbrace{\left(\bar{r} + M + \frac{M^2}{4\bar{r}} - 2M\right)}_{= \cancel{\bar{r}}\left(1 - \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}}\right)^2$$

Ainsi,

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}}\right)^2 dt^2 + \frac{\left(1+\frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 \cancel{\left(1-\frac{M}{2\bar{r}}\right)^2}}{\cancel{\left(1-\frac{M}{2\bar{r}}\right)^2}\left(1+\frac{M}{2\bar{r}}\right)^{-2}} d\bar{r}^2$$

$$+ \bar{r}^2\left(1+\frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 d\Omega^2$$

$$\boxed{g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\, d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta = -\left(\frac{1-\frac{M}{2\bar{r}}}{1+\frac{M}{2\bar{r}}}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{M}{2\bar{r}}\right)^4\left(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2\right)}$$

b) Soit (γ_{ij}) la métrique induite sur les hypersurfaces $t = \text{const}$.

Alors

$$\gamma_{ij} = \Phi^4 \underbrace{\left(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}_{\text{métrique de l'espace plat tridimensionnel en coordonnées sphériques } (\bar{r}, \theta, \varphi)}$$

$$\Phi = 1 + \frac{M}{2\bar{r}}$$

Les coordonnées $(\bar{x}^\alpha)$ sont dites <u>isotropes</u> car la métrique induite γ_{ij} est proportionnelle à la métrique de l'espace plat tridimensionnel, qui ne fait intervenir <u>aucune direction privilégiée</u>.

(2) a) Lorsque $\bar{r} \gg M$, on a

$$\left(\frac{1-\frac{M}{2\bar{r}}}{1+\frac{M}{2\bar{r}}}\right)^2 \simeq 1 - \frac{2M}{\bar{r}} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 \simeq 1 + \frac{2M}{\bar{r}},$$

de sorte que

$$\boxed{g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\, d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta = -\left(1-\frac{2M}{\bar{r}}\right)dt^2 + \left(1+\frac{2M}{\bar{r}}\right)\left(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2\right)}$$

b) On retrouve, dans cette limite de champ faible, la <u>métrique newtonienne</u> faisant intervenir le potentiel gravitationnel newtonien $U = M/\bar{r}$ qui obéit à l'<u>équation de Poisson</u>, qui dérive de l'équation d'Einstein dans cette limite.

4. Gravité unimodulaire

Équation de champ $\quad R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} = 8\pi\left(T_{ab} - \frac{1}{4} T g_{ab}\right)$

(1) L'équation d'Einstein, $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}$, relie elle aussi la géométrie de l'espace-temps (g_{ab}, R, R_{ab}) au contenu matériel (T_{ab}), mais on note une différence de préfacteur dans le deuxième terme du membre de gauche ainsi qu'un terme additionnel dans le membre de droite.

(2) $$g^{ab}\left(R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab}\right) = \underbrace{g^{ab} R_{ab}}_{= R} - \frac{1}{4} R \underbrace{g^{ab} g_{ab}}_{= 4} = 0$$

De même, $g^{ab}\left(T_{ab} - \frac{1}{4} T g_{ab}\right) = 0$. En prenant la trace de l'équation de champ, on trouve donc identiquement $0 = 0$.

(3) a) Prenons la divergence de l'équation de champ :

$$\nabla^a\left(R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab}\right) = 8\pi \, \nabla^a\left(T_{ab} - \frac{1}{4} T g_{ab}\right)$$

$$\underbrace{\nabla^a\left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}\right)}_{= 0 \text{ d'après l'identité de Bianchi contractée}} + \frac{1}{4} \nabla^a (R g_{ab}) = 8\pi \underbrace{\nabla^a T_{ab}}_{= 0 \text{ par conservation locale de l'énergie-impulsion}} - 2\pi \nabla^a (T g_{ab})$$

compatibilité métrique

$$(\nabla^a R) g_{ab} + R \cancel{\nabla^a g_{ab}} = -8\pi (\nabla^a T) g_{ab} - 8\pi T \cancel{\nabla^a g_{ab}}$$

$$\nabla_b R + 8\pi \nabla_b T = 0$$

$$\boxed{\nabla_a (R + 8\pi T) = 0}$$

b) Par conséquent $R + 8\pi T = C$ est un champ scalaire constant.

L'équation de champ peut donc se réécrire sous la forme

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab} - \frac{1}{4} g_{ab} \underbrace{(R + 8\pi T)}_{= C}$$

En posant $\Lambda \equiv C/4$, il vient

$$\boxed{R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}}$$

On reconnait l'<u>équation d'Einstein avec une constante cosmologique Λ</u> qui apparait comme une <u>constante d'intégration</u>.