Corrigé Examen EL3 : ~~Gravitation~~ Relativiste

Année 2015 - 2016

1. Effet Einstein

Coordonnées de Schwarzschild $(x^\alpha) = (t, r, \theta, \varphi)$
Métrique de Schwarzschild g_{ab} de composantes

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

① Lorsque $r \longrightarrow +\infty$, $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \sim -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$

Les composantes $g_{\alpha\beta}$ de la métrique de Schwarzschild en coordonnées de Schwarzschild tendent vers les composantes $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, r^2, r^2\sin^2\theta)$ de la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques.

Lorsque $r \to +\infty$, la métrique de Schwarzschild g_{ab} tend vers la métrique de Minkowski η_{ab}.

② a) Les composantes $g_{\alpha\beta}$ de la métrique de Schwarzschild g_{ab} en coordonnées de Schwarzschild (x^α) ne dépendent ni de t, ni de φ. L'espace-temps de Schwarzschild est donc stationnaire et axisymétrique.

De fait, la métrique de Schwarzschild est même <u>statique</u> et à <u>symétrie sphérique</u>.

b) Les champs de vecteurs $\xi^a \equiv (\partial_t)^a$ et $\eta^a \equiv (\partial_\varphi)^a$ sont donc des (champs de) <u>vecteurs de Killing</u>. Ils vérifient donc l'équation de Killing :

$$\boxed{\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\nabla_{(a}\eta_{b)} = 0}$$

3) a) De manière générale,

$$\boxed{u^a = u^t (\partial_t)^a + u^r (\partial_r)^a + u^\theta (\partial_\theta)^a + u^\varphi (\partial_\varphi)^a}$$

composantes du vecteur u^a

éléments de la base naturelle associée aux coordonnées (x^α)

Pour un observateur <u>statique</u>, $u^\alpha = (u^t, 0, 0, 0)$, de sorte que

$$\boxed{u^a = u^t \xi^a}$$

b) La quadrivitesse u^a vérifie la condition de normalisation

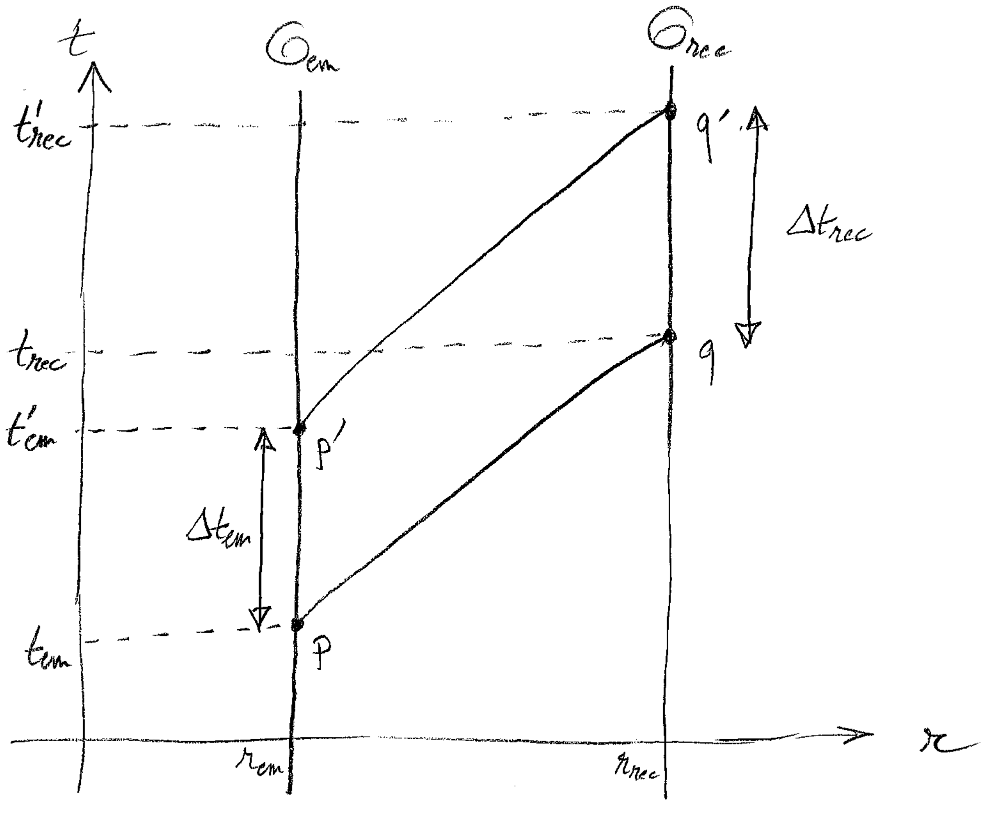
$$g_{ab}\, u^a u^b = -1$$

$$\underbrace{g_{ab}\, \xi^a \xi^b}\, (u^t)^2 = -1$$

$$= g_{\alpha\beta} (\partial_t)^\alpha (\partial_t)^\beta = g_{00} = -1 + \frac{2M}{r}$$

$$\boxed{u^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}}$$

4



5) a) La métrique de Schwarzschild est stationnaire (et même statique), de sorte que l'expérience d'émission et de réception d'un photon est invariante par translation dans la direction $(\partial_t)^a$. Par conséquent

$$\boxed{(\Delta t_{rec} \equiv t'_{rec} - t_{rec}) = (\Delta t_{em} \equiv t'_{em} - t_{em})}$$

b) $u^t = \dfrac{dt}{d\tau} \Rightarrow d\tau = (u^t)^{-1}\, dt$

intégration

Pour un observateur statique, $(u^t)^{-1} = \left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2} = \text{const.}$

$$\Delta\tau = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \Delta t$$

Ainsi,

$$\frac{\Delta\tau_{rec}}{\Delta\tau_{em}} = \frac{(1 - 2M/r_{rec})^{1/2}}{(1 - 2M/r_{em})^{1/2}} \underbrace{\frac{\Delta t_{rec}}{\Delta t_{em}}}_{=1}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\tau_{rec}}{\Delta\tau_{em}} = \left(\frac{1 - 2M/r_{rec}}{1 - 2M/r_{em}}\right)^{1/2}}$$

c) Si $r_{rec} > r_{em}$ alors $\underline{\Delta\tau_{rec} > \Delta\tau_{em}}$.

Plus le champ gravitationnel local est intense et plus le temps « s'écoule lentement ».

(6) Si ω_{em} est la fréquence du photon telle que mesurée par l'observateur O_{em} et ω_{rec} la fréquence du photon telle que mesurée par l'observateur O_{rec}, alors

$$\boxed{\frac{\omega_{rec}}{\omega_{em}} = \left(\frac{1 - 2M/r_{em}}{1 - 2M/r_{rec}}\right)^{1/2}}$$

(décalage spectral gravitationnel)

Les périodes associées, telles que mesurées par les observateurs O_{em} et O_{rec}, ~~sont~~ $T_{em} = 2\pi/\omega_{em}$ et $T_{rec} = 2\pi/\omega_{rec}$, et vérifient donc

$$\frac{T_{rec}}{T_{em}} = \left(\frac{1 - 2M/r_{rec}}{1 - 2M/r_{em}}\right)^{1/2},$$

en parfait accord avec la formule (4).

2. Effet Shapiro

(1) a) La quadri-impulsion d'un photon est un vecteur du genre lumière de sorte que

$$\boxed{p^a p_a = g_{ab}\, p^a p^b = 0}$$

b) La trajectoire d'un photon dans l'espace-temps est une courbe géodésique du genre lumière, de sorte que

$$\boxed{p^a \nabla_a p^b = 0}.$$

c) Les grandeurs $E \equiv -\xi^a p_a$ et $L \equiv \eta^a p_a$ sont conservées le long de la trajectoire du photon car :

- ξ^a et η^a sont des vecteurs de Killing
- p^a est tangent à une courbe géodésique

Puisque $\xi^a = (\partial_t)^a$ et que $(\partial_t)^a$ coïncide avec la quadrivitesse d'un observateur statique à l'infini, $E = -\xi^a p_a$ est l'énergie du photon, telle que mesurée par un observateur statique à l'infini.

De même, $L = \eta^a p_a$ est le moment angulaire du photon, tel que mesuré par un observateur statique à l'infini.

2) En combinant les équations

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\lambda} = E\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{-1} \\ \left(\dfrac{dr}{d\lambda}\right)^2 + U_{eff}(r) = E^2 \quad \text{avec} \quad U_{eff}(r) = \dfrac{L^2}{r^2}\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right) \end{cases}$$

on obtient

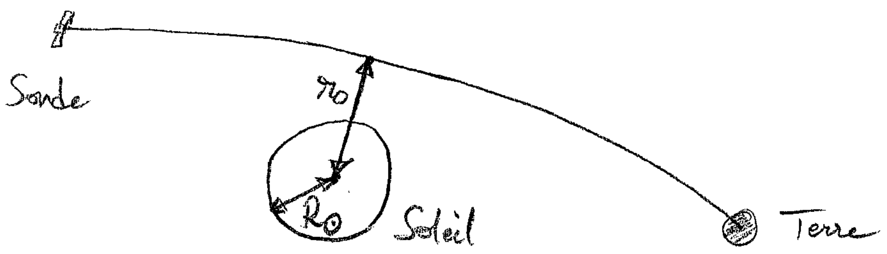
$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(\frac{d\lambda}{dr}\right)^2$$

$$= E^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2} \left(E^2 - U_{eff}\right)^{-1}$$

$$= \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2} \left[1 - \frac{L^2}{E^2}\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]^{-1}$$

$$\boxed{\frac{dt}{dr} = \pm \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left[1 - \frac{b^2}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]^{-1/2}} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{b \equiv \frac{L}{E}}}$$

3



a) $\frac{dr}{dt} = 0 \iff r = 2M$ ou $1 = \frac{b^2}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)$

Puisque $r = r_0 > R_\odot \gg 2M_\odot$, r_0 est solution de

$$1 = \frac{b^2}{r_0^2}\left(1-\frac{2M}{r_0}\right) \Rightarrow \boxed{b = r_0\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2}}$$

b) Par conséquent $1 - \frac{b^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 1 - \frac{r_0^2}{r^2}\,\frac{1 - 2M/r}{1 - 2M/r_0}$

$$\boxed{\frac{dt}{dr} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\,\frac{1 - 2M/r}{1 - 2M/r_0}\right)^{-1/2}}$$

4) a) Comme déjà mentionné, $r_0 > R_\odot \gg 2M_\odot \longrightarrow \boxed{r_0 \gg 2M}$

b) $$\frac{dt}{dr} = \pm\left(1 + \frac{2M}{r} + \cdots\right)\Big[\underbrace{1 - \frac{r_0^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M}{r_0} + \cdots\right)}\Big]^{-1/2}$$

$$= 1 - \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{r_0^2}{r^2}\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{r_0}\right) + \cdots$$

$$= \frac{r^2 - r_0^2}{r^2}\left[1 + \frac{r_0^2}{r^2 - r_0^2}\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{r_0}\right) + \cdots\right]$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm\left(1 + \frac{2M}{r} + \cdots\right)\frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}\left[1 + \underbrace{\frac{r_0^2}{r^2 - r_0^2}\left(\frac{M}{r_0} - \frac{M}{r}\right)} + \cdots\right]$$

$$= \frac{r_0^{\cancel{2}}\,\cancel{(r - r_0)}\,M}{\cancel{(r - r_0)}(r + r_0)\,r\,\cancel{r_0}}$$

$$= \pm\frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}\left(1 + \frac{2M}{r_0} + \frac{M}{r}\,\frac{r_0}{r + r_0} + \cdots\right)$$

$$\boxed{\frac{dt}{dr} \simeq \pm\frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}\left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{M}{r}\,\frac{r_0}{r + r_0}\right)}$$

5) a) Lorsque r varie entre $\begin{cases} r_\oplus \text{ et } r_0, & dr < 0 \\ r_0 \text{ et } r_*, & dr > 0 \end{cases}$

Ainsi, $$\frac{T}{2} = -\int_{r_\oplus}^{r_0} \frac{dt}{dr}\, dr + \int_{r_0}^{r_*} \frac{dt}{dr}\, dr$$

où $$\frac{dt}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2-r_0^2}}\left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{M}{r}\,\frac{r_0}{r+r_0}\right).$$

$$\frac{T}{2} = \underbrace{\int_{r_0}^{r_\oplus} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-r_0^2}}}_{=\sqrt{r_\oplus^2-r_0^2}} + 2M\underbrace{\int_{r_0}^{r_\oplus} \frac{dr}{\sqrt{r^2-r_0^2}}}_{=\ln\left(\frac{r_\oplus}{r_0}+\sqrt{\frac{r_\oplus^2}{r_0^2}-1}\right)} + M\overbrace{\int_{r_0}^{r_\oplus} \frac{r_0\,dr}{\sqrt{r-r_0}\,(r+r_0)^{3/2}}}^{=\sqrt{\frac{r_\oplus-r_0}{r_\oplus+r_0}}} + (\text{idem avec } r_\oplus \to r_*)$$

Par conséquent, le temps d'aller-retour est donné par l'expression

$$\boxed{T = 2t(r_0, r_\oplus) + 2t(r_0, r_*)}$$ où

$$\boxed{t(r_0, r_\oplus) \equiv \sqrt{r_\oplus^2 - r_0^2} + 2M\ln\left(\frac{r_\oplus}{r_0} + \sqrt{\frac{r_\oplus^2}{r_0^2}-1}\right) + M\sqrt{\frac{r_\oplus - r_0}{r_\oplus + r_0}}}$$

b) D'après le théorème de Pythagore, la durée newtonienne du trajet aller-retour vaut ($c=1$)

espace euclidien

$$\boxed{T_{newt} = 2\sqrt{r_\oplus^2 - r_0^2} + 2\sqrt{r_*^2 - r_0^2}}$$

Par conséquent, la durée du trajet aller-retour peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{T = T_{newt} + \Delta T},$$

où le délai supplémentaire ΔT a pour expression

$$\boxed{\Delta T = 4M \ln\left[\frac{\left(r_\oplus + \sqrt{r_\oplus^2 - r_0}\right)\left(r_* + \sqrt{r_*^2 - r_0^2}\right)}{r_0^2}\right] + 2M\left(\sqrt{\frac{r_\oplus - r_0}{r_\oplus + r_0}} + \sqrt{\frac{r_* - r_0}{r_* + r_0}}\right).}$$

c) Le délai supplémentaire ΔT a pour origine la <u>courbure de l'espace-temps</u> engendrée par la masse M.

6 a) $\left.\begin{matrix} r_\oplus \gg r_0 \\ r_* \gg r_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{r_\oplus - r_0}{r_\oplus + r_0}} \simeq \sqrt{\frac{r_* - r_0}{r_* + r_0}} \simeq 1$

et $\left(r_\oplus + \sqrt{r_\oplus^2 - r_0^2}\right)\left(r_* + \sqrt{r_*^2 - r_0^2}\right) \simeq 4 r_\oplus r_*$

$M = M_\odot$
$r_0 = R_\odot$
$r_* = r_♂$
$\Downarrow$

$$\boxed{\Delta T \simeq 4M_\odot\left[\ln\left(\frac{4 r_\oplus r_♂}{R_\odot^2}\right) + 1\right]}$$

b) Avec $M_\odot \to \frac{GM_\odot}{c^3}$ on trouve $\underline{\Delta T \simeq 0{,}27\ ms}$

3. Champ scalaire massif

$$T_{ab} = \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi - \frac{1}{2} g_{ab} \left(\nabla^c \Phi \nabla_c \Phi + m^2 \Phi^2 \right)$$

① Mathématiquement, la loi de conservation locale de l'énergie et de l'impulsion s'exprime sous la forme

$$\boxed{\nabla^a T_{ab} = 0}.$$

② a) Dans le cas d'un champ scalaire Φ de masse m, cette équation implique

$$(\nabla^a \nabla_a \Phi) \nabla_b \Phi + \nabla_a \Phi \nabla^a \nabla_b \Phi - \frac{1}{2} \nabla_b \left(\overbrace{\nabla^c \Phi \nabla_c \Phi}^{= \nabla^a \Phi \nabla_a \Phi} + m^2 \Phi^2 \right) = 0$$

$$\nabla_b \Phi (\nabla^a \nabla_a \Phi) + \underbrace{\nabla^a \Phi \nabla_a \nabla_b \Phi - \nabla^a \Phi \nabla_b \nabla_a \Phi}_{= 0 \text{ car } \nabla_a \nabla_b \Phi = \nabla_b \nabla_a \Phi \text{ (absence de torsion)}} - m^2 \Phi \nabla_b \Phi = 0$$

$$\nabla_b \Phi \left[\nabla^a \nabla_a \Phi - m^2 \Phi \right] = 0$$

En excluant la solution triviale $\Phi = \text{const}$, il vient donc

$$\boxed{g^{ab} \nabla_a \nabla_b \Phi = m^2 \Phi}$$

b) Il s'agit d'une équation d'onde linéaire avec source.

3) a) La densité de quadri-impulsion dans le champ scalaire, telle que mesurée par un observateur de quadrivitesse u^a est

$$\boxed{-T^a{}_b u^b = -\dot{\Phi}\,\nabla^a\Phi + \frac{1}{2}(\nabla^c\Phi\,\nabla_c\Phi + m^2\Phi^2)\,u^a}$$

où l'on a posé $\dot{\Phi} \equiv u^a \nabla_a \Phi$.

b) La densité d'énergie correspondante est

$$\boxed{T_{ab}u^a u^b = (\dot{\Phi})^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{m^2}{2}\Phi^2}$$

4. Vecteurs de Killing

1)
$$\begin{aligned}
k^a \nabla_a X &= k^a \nabla_a (k^b k_b) \\
&= k^a \nabla_a (g_{bc} k^b k^c) \\
&= k^a (\cancel{\nabla_a g_{bc}})\, k^b k^c + k^a g_{bc}\left[(\nabla_a k^b) k^c + k^b \nabla_a k^c\right] \\
&= k^a (k_b \nabla_a k^b + k_c \nabla_a k^c) \\
&= 2 k^a k^b \nabla_a k_b \\
&= 2 k^a k^b \cancel{\nabla_{(a} k_{b)}}
\end{aligned}$$

$\downarrow$

$$\boxed{k^a \nabla_a X = 0}$$

2) a) $k^a \nabla_a k_b \underset{\text{Killing}}{=} - k^a \nabla_b k_a = -\frac{1}{2} \nabla_b (\underbrace{k^a k_a}_{= \chi})$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k^a \nabla_a k_b = -\frac{1}{2} \nabla_b \chi}$$

b) Par conséquent $\boxed{k^a \nabla_a k_b = 0 \iff \nabla_b \chi = 0}$

équation des géodésiques

χ est un champ scalaire constant

3) a) $\nabla_a \nabla_b k_c = - \nabla_a \nabla_c k_b$ (équation de Killing)

$= - \nabla_c \nabla_a k_b - R_{acb}{}^d k_d$ (définition de la courbure)

$= \nabla_c \nabla_b k_a - R_{acb}{}^d k_d$

$= \nabla_b \nabla_c k_a + R_{cba}{}^d k_d - R_{acb}{}^d k_d$

$= - \nabla_b \nabla_a k_c + R_{cba}{}^d k_d - R_{acb}{}^d k_d$

$$\boxed{\nabla_a \nabla_b k_c = - \nabla_a \nabla_b k_c - R_{bac}{}^d k_d + R_{cba}{}^d k_d - R_{acb}{}^d k_d}$$

b) Par conséquent,

$$2 \nabla_a \nabla_b k_c = (R_{cbad} - R_{bacd} - R_{acbd}) k^d$$

D'après les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann,

$$0 = R_{[abc]d} = \frac{1}{3!}\Big(R_{abcd} - R_{bacd} + R_{bcad} - R_{cbad} + R_{cabd} - R_{acbd} \Big)$$

$$= \frac{1}{3!}\Big(- R_{bacd} - R_{bacd} - R_{cbad} - R_{cbad} - R_{acbd} - R_{acbd} \Big)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{R_{bacd} + R_{cbad} + R_{acbd} = 0}$$

$$\downarrow$$

$$R_{cbad} - R_{bacd} - R_{acbd} = 2 R_{cbad}$$

$$\downarrow$$

$$2 \nabla_a \nabla_b k_c = 2 R_{cbad} k^d = 2 R_{cba}{}^d k_d$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\nabla_a \nabla_b k_c = R_{cba}{}^d k_d}$$

c) Par conséquent,

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b k_c = g^{ab} R_{cba}{}^{d} k_d$$

$$\nabla_a \nabla^a k_c = - \underbrace{g^{ab} R_{bcad}}_{= R_{cd}} k^d$$

(définition du tenseur de Ricci)

$$\downarrow$$

$$\boxed{\nabla_a \nabla^a k_b = - R_{bc} k^c}$$

d) Dans le vide, l'équation d'Einstein stipule que $\boxed{R_{ab} = 0}$, de sorte que $\boxed{\nabla_a \nabla^a k_b = 0}$.

Il s'agit d'une équation d'onde linéaire et homogène.

4) Un espace-temps est dit plat si, et seulement si, le tenseur de courbure associé est nul : $\boxed{R_{abc}{}^{d} = 0}$

5) a) Les composantes du symbole de Christoffel associé à un système de coordonnées globalement inertielles sont nulles en tout point : $\boxed{\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = 0}$

b) Par rapport aux coordonnées globalement inertielles (x^α), les composantes de l'équation de Killing prennent donc la forme

$$0 = \nabla_{(\alpha} k_{\beta)} = \partial_{(\alpha} k_{\beta)} - \cancel{\Gamma^\gamma{}_{(\alpha\beta)}} k_\gamma$$

$$\boxed{\frac{\partial k_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial k_\beta}{\partial x^\alpha} = 0}$$

c) Dans l'espace-temps de Minkoski, l'Éq. (18) se réduit à

$$\boxed{\nabla_a \nabla_b k_c = 0} \qquad (\text{car } R_{abc}{}^d = 0)$$

Par rapport aux coordonnées globalement inertielles (x^α), les composantes de cette équation prennent la forme

$$0 = \nabla_\alpha \nabla_\beta k_\gamma = \partial_\alpha \left(\partial_\beta k_\gamma - \cancel{\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma}} k_\sigma \right)$$

$$- \cancel{\Gamma} (\cdots) - \cancel{\Gamma} (\cdots)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 k_\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0}$$

De manière équivalente, $\dfrac{\partial^2 k_\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = 0$.

6 a) L'équation précédente implique

$$\frac{\partial k_\alpha}{\partial x^\beta} = \underline{a_{\alpha\beta} = \text{const.}}$$

$$\boxed{k_\alpha(x) = a_{\alpha\beta}\, x^\beta + b_\alpha} \quad \text{où} \quad \underline{b_\alpha = \text{const.}}$$

Par ailleurs, $\frac{\partial k_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial k_\beta}{\partial x^\alpha} = 0 \implies a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0.$

La matrice $(a_{\alpha\beta})$ est donc <u>antisymétrique</u>.

b) • La matrice $(a_{\alpha\beta})$ possède $\frac{1}{2}(4\times 4 - 4) = 6$ degrés de libertés

• Le vecteur (b_α) possède 4 degrés de liberté

↳ <u>10 degrés de liberté</u> en tout.

c) (i) $a_{\alpha\beta} = 0 \implies k_\alpha = b_\alpha$ <u>translations spacio-temporelles</u> (4 degrés de liberté)

(ii) $\begin{cases} a_{0i} = 0 \\ b_\alpha = 0 \end{cases} \implies k_i = a_{ij}\, x^j$ avec $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{pmatrix}$

une matrice de rotation 3×3

<u>rotations spatiales</u> (3 degrés de liberté)

(iii) $\begin{cases} a_{ij} = 0 \\ b_\alpha = 0 \end{cases} \implies k_\alpha = a_{\alpha\beta}\, x^\beta$ avec $(a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & A & B & C \\ -A & 0 & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

boosts de Lorentz
(3 degrés de liberté)

On retrouve donc les symétries associées au groupe de Poincaré, le groupe d'invariance de l'espace-temps de Minkowski.