Corrigé Examen EL3 : Gravitation Relativiste

Année 2014-2015

1. Trous noirs en rotation

Coordonnées de Boyer-Lindquist $(x^a) = (t, r, \theta, \varphi)$

Métrique de Kerr g_{ab} de composantes

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mar}{\rho^2} \sin^2\theta\, dt\, d\varphi$$

$$+ \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r}{\rho^2} \sin^2\theta\right) \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \end{array} \right.$ Masse M, Moment angulaire $J = aM$

1) a) Les composantes $g_{\alpha\beta}$ de la métrique de Kerr g_{ab} en coordonnées de Boyer-Lindquist (x^α) ne dépendent ni de t, ni de φ. L'espace-temps de Kerr est donc <u>stationnaire</u> et <u>axisymétrique</u>.

b) Les champs de vecteurs $\xi^a \equiv (\partial_t)^a$ et $\chi^a \equiv (\partial_\varphi)^a$ sont donc des (champs de) <u>vecteurs de Killing</u>. Ils vérifient donc l'équation de Killing :

$$\boxed{\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\nabla_{(a}\chi_{b)} = 0}$$

2) a) Lorsque $r \to +\infty$,

$$\begin{cases} \rho^2 \sim r^2 \\ \Delta \sim r^2 \end{cases} \Rightarrow g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \sim -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Les composantes $g_{\alpha\beta}$ de la métrique de Kerr en coordonnées de Boyer-Lindquist tendent vers les composantes $(\eta_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(-1, 1, r^2, r^2\sin^2\theta)$ de la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques.

Lorsque $r \to +\infty$, la métrique de Kerr g_{ab} <u>tend vers la métrique de Minkowski η_{ab}</u>.

b) Lorsque $a \to 0$,

$$\begin{matrix} \rho^2 = r^2 \\ \Delta = r^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \end{matrix} \Rightarrow g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

On reconnaît la <u>métrique de Schwarzschild</u> de masse M en <u>coordonnées de Schwarzschild</u>.

③ a) $\boxed{p^a = m u^a}$ où m est la masse (au repos) de la particule, une constante positive

$$\boxed{u^a u_a = g_{ab} u^a u^b = -1}$$ la quadrivitesse est un vecteur unitaire.

$$p^a p_a = g_{ab} p^a p^b = g_{ab} (m u^a)(m u^b)$$
$$= m^2 (g_{ab} u^a u^b) \longrightarrow \boxed{p^a p_a = -m^2}$$

b) La particule ne subit l'action d'aucune force extérieure. Elle est donc en chute libre. Son mouvement est donc inertiel, ou non accéléré. Sa ligne d'univers $\mathcal{L}$ est donc une courbe géodésique du genre temps. Par conséquent, la quadri-impulsion p^a (champ de vecteurs tangents à $\mathcal{L}$) obéit à l'équation des géodésiques

$$\boxed{p^a \nabla_a p^b = 0}$$

Puisque m = const., on a de manière équivalente

$$\boxed{u^a \nabla_a u^b = 0}$$

c) Les grandeurs $e \equiv -\xi^a u_a$ et $l \equiv \eta^a u_a$ sont conservées le long de $\mathcal{L}$ car :

- ξ^a et η^a sont des <u>vecteurs de Killing</u>
- $\mathcal{L}$ est une <u>courbe géodésique</u>

Puisque $\xi^a \longrightarrow (\partial_t)^a$ lorsque $r \to +\infty$ et que $(\partial_t)^a$ coïncide avec la quadrivitesse d'un observateur statique à l'infini, $e = -\xi^a u_a$ est l'<u>énergie</u> par <u>unité de masse</u> de la particule, telle que <u>mesurée</u> par <u>un observateur statique à l'∞</u>.

De même, $l = \eta^a u_a$ est le <u>moment angulaire</u> par <u>unité de masse</u> de la particule, tel que <u>mesuré</u> par <u>un observateur statique à l'∞</u>.

④ a) De manière générale,

$$\boxed{u^a = u^t (\partial_t)^a + u^r (\partial_r)^a + u^\theta (\partial_\theta)^a + u^\varphi (\partial_\varphi)^a}$$

composantes du vecteur u^a

éléments de la base naturelle associée aux coordonnées (t, r, θ, φ)

Puisque $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\boxed{u^\theta = \frac{d\theta}{d\tau} = 0}$

b) $e = -\xi^a u_a$ — dualité métrique et $\xi^a = (\partial_t)^a$

$= -g_{ab}(\partial_t)^a u^b$ — décomposition sur la base naturelle associée aux coordonnées (x^α)

$= -g_{\alpha\beta}(\partial_t)^\alpha u^\beta$ — $(\partial_t)^\alpha = (1,0,0,0)$

$= -g_{t\beta} u^\beta$ — $g_{tr} = 0 = g_{t\theta}$

$= -(g_{tt} u^t + g_{t\varphi} u^\varphi)$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^2\theta = 0$ et $\sin^2\theta = 1$

$\Rightarrow g_{tt} = -1 + \frac{2M}{r}$ et $g_{t\varphi} = -\frac{2Ma}{r}$

Par conséquent $\boxed{e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) u^t + \frac{2Ma}{r} u^\varphi}$

De même, $l = \eta^a u_a$

$= g_{ab}(\partial_\varphi)^a u^b$

$= g_{\alpha\beta}(\partial_\varphi)^\alpha u^\beta$

$= g_{\varphi\beta} u^\beta$

$= g_{\varphi t} u^t + g_{\varphi\varphi} u^\varphi$

$\hookrightarrow \boxed{l = -\frac{2Ma}{r} u^t + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) u^\varphi}$

5) a)

$$
\begin{aligned}
-1 &= u^a u_a \\
&= g_{ab} u^a u^b \\
&= g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \qquad (u^\theta = 0) \\
&= g_{tt} (u^t)^2 + g_{rr} (u^r)^2 + g_{\varphi\varphi} (u^\varphi)^2 + 2 g_{t\varphi} u^t u^\varphi \\
&= u^t \underbrace{\left(g_{tt} u^t + g_{t\varphi} u^\varphi \right)}_{= -e} + u^\varphi \underbrace{\left(g_{t\varphi} u^t + g_{\varphi\varphi} u^\varphi \right)}_{= l} + g_{rr}(u^r)^2
\end{aligned}
$$

$$
\hookrightarrow \quad \frac{r^2}{\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = -1 + e u^t - l u^\varphi
$$

En inversant les expressions (2), il vient

$$
\left\{
\begin{aligned}
u^t &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) e - \frac{2Ma}{r} l \right] \\
u^\varphi &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{2Ma}{r} e + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) l \right]
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
r^2 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 &= -\Delta + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) e^2 - \frac{2Ma}{r} e l \\
&\quad - \frac{2Ma}{r} e l - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) l^2 \\
&= r^2 (e^2 - 1) + 2Mr + a^2 (e^2 - 1) - l^2 \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(2Ma^2 e^2 - 4Mael + 2Ml^2 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{e^2 - 1}{2} + \frac{M}{r} - \frac{l^2 + a^2(1 - e^2)}{2r^2} + \frac{M(l - ae)^2}{r^3}
$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{eff}(r) = \frac{e^2-1}{2}}$$

avec le potentiel effectif

$$\boxed{V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2 + a^2(1-e^2)}{2r^2} - \frac{M(l-ae)^2}{r^3}}$$

Par conséquent $\boxed{\alpha = M}$, $\boxed{\beta = \frac{l^2 + a^2(1-e^2)}{2}}$ et $\boxed{\gamma = M(l-ae)^2}$

b) Lorsque $a = 0$, $\beta = \frac{l^2}{2}$ et $\gamma = M l^2$

$$\hookrightarrow \boxed{V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}}$$

potentiel gravitationnel attractif de type newtonien

potentiel centrifuge répulsif de type newtonien

potentiel attractif purement relativiste

On retrouve le fait que, dans la métrique de Schwarzschild, le mouvement radial de la particule obéit à une équation différentielle ordinaire dans un potentiel effectif qui ne dépend que du moment angulaire par unité de masse l (et de la masse M du corps central).

6) a) Une orbite circulaire doit vérifier $r = \text{const.} \Longrightarrow \frac{dr}{d\tau} = 0$ pour tout τ. Une telle orbite doit donc vérifier

$$\boxed{V_{eff}(r) = \frac{e^2-1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{V'_{eff}(r) = 0}$$

La première condition est conséquence de $dr/d\tau = 0$ dans l'équation du mouvement radial. La seconde condition stipule que l'orbite correspond à un extremum du potentiel.

b) La fonction $V_{eff}(r)$ dépend des paramètres M, a, e, l.

En imposant les deux conditions pour une orbite circulaire, il est possible d'exprimer deux des trois inconnues r, e et l en fonction de la troisième. Par exemple on peut exprimer e et l en fonction de r (et des paramètres M et a).

Une fois les expressions $e(r; M, a)$ et $l(r; M, a)$ connues, on peut les remplacer dans les expressions pour u^t et u^φ en fonction de e et l qui nous sont données dans la question 4. On obtient alors les expressions pour $u^t(r; M, a)$ et $u^\varphi(r; M, a)$.

7) a) Pour une orbite circulaire, $u^r = 0$.

En reprenant la réponse à la question 4) a) il vient donc

$$u^a = u^t (\partial_t)^a + u^\varphi (\partial_\varphi)^a$$

$$\Rightarrow \boxed{u^a = u^t (\xi^a + \omega \eta^a)} \quad \text{où} \quad \boxed{\omega \equiv \frac{u^\varphi}{u^t}}$$

b) En contractant avec u_a on obtient

$$\underbrace{u_a u^a}_{=-1} = u^t (\underbrace{u_a \xi^a}_{=-e} + \omega \underbrace{u_a \eta^a}_{=\ell})$$

$$\Rightarrow \boxed{u^t (e - \omega \ell) = 1}$$

c) $$\omega = \frac{u^\varphi}{u^t} = \frac{1}{M} \frac{v^3}{1 + \bar{a} v^3}$$

$$e - \omega \ell = \frac{1 - 2v^2 + \bar{a} v^3}{\sqrt{1 - 3v^2 + 2\bar{a}v^3}} - \frac{1}{\cancel{M}} \frac{v^3}{1 + \bar{a}v^3} \frac{\cancel{M}}{v} \frac{1 - 2\bar{a}v^3 + \bar{a}^2 v^4}{\sqrt{1 - 3v^2 + 2\bar{a}v^3}}$$

$$= (1 - 3v^2 + 2\bar{a}v^3)^{-1/2} \left[1 - 2v^2 + \bar{a}v^3 - \frac{v^2 (1 - 2\bar{a}v^3 + \bar{a}^2 v^4)}{1 + \bar{a}v^3} \right]$$

$$= \frac{(1 - 3v^2 + 2\bar{a}v^3)^{-1/2}}{1 + \bar{a}v^3} \Big[\underbrace{(1 - 2v^2 + \bar{a}v^3)(1 + \bar{a}v^3) - v^2 (1 - 2\bar{a}v^3 + \bar{a}^2 v^4)}_{= \cdots = 1 - 3v^2 + 2\bar{a}v^3} \Big]$$

$$= \frac{\sqrt{1 - 3v^2 + 2\bar{a}v^3}}{1 + \bar{a}v^3} = \frac{1}{u^t}$$

8) a) Une orbite circulaire n'est <u>stable</u> que si elle correspond à un <u>minimum</u> local du potentiel effectif radial $V_{eff}(r)$

$\hookrightarrow$ $\boxed{V''_{eff}(r) > 0}$

b) $$r_{ISCO} = M\left[3 + Z_2 - \sqrt{(3-Z_1)(3+Z_1+2Z_2)}\right]$$

où $$\begin{cases} Z_1 \equiv 1 + (1-\bar{a}^2)^{1/3}\left[(1+\bar{a})^{1/3} + (1-\bar{a})^{1/3}\right] \\ Z_2 \equiv \sqrt{3\bar{a}^2 + Z_1^2} \end{cases}$$

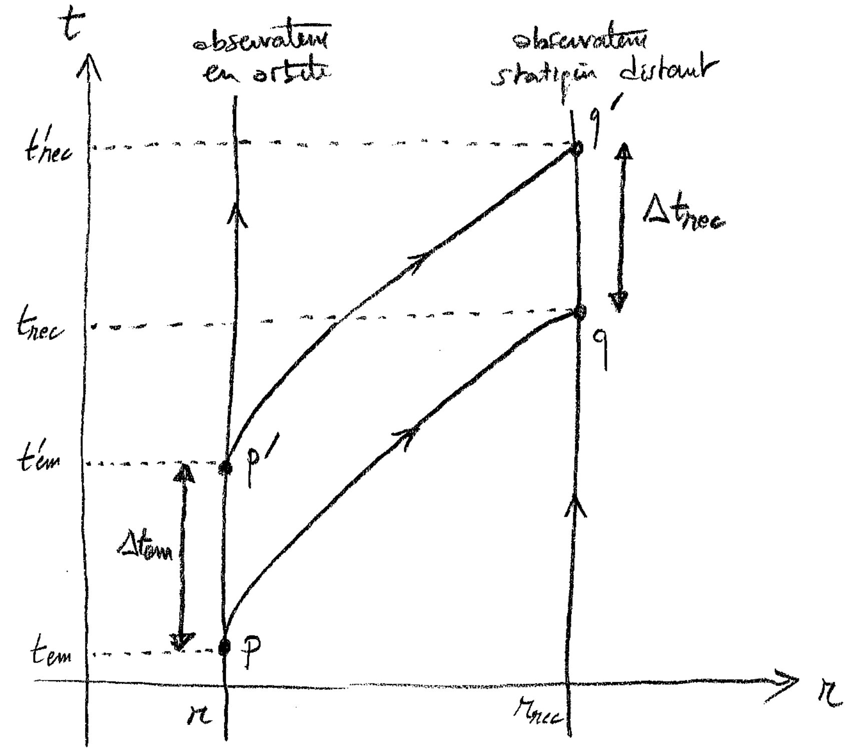
• $\underline{\bar{a} = 0}$ $\Longrightarrow \begin{cases} Z_1 = 3 \\ Z_2 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{r_{ISCO} = 6M}$

On retrouve que la dernière orbite circulaire stable autour d'un trou noir de Schwarzschild se trouve en $r = 6M$, telle que mesurée en coordonnée radiale de Schwarzschild.

• $\underline{\bar{a} = 1}$ $\Longrightarrow \begin{cases} Z_1 = 1 \\ Z_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{r_{ISCO} = M}$

L'ISCO d'un trou noir de Kerr extrême se trouve bien plus proche du corps central que celle d'un trou noir statique.

9) a)



b) La métrique de Kerr est <u>axisymétrique</u>, de sorte que le photon émis en p' avec une coordonnée azimuthale $\varphi_{em} + 2\pi$ est "identique" à celui émis en p avec une coordonnée azimuthale φ_{em}, à ceci près qu'il est émis "plus tard".

L'observateur statique distant reçoit donc le second photon à la même position spatiale que lorsqu'il a reçu le premier photon.

Ceci implique $\boxed{\varphi'_{rec} = \varphi_{rec}}$.

c) La métrique de Kerr est <u>stationnaire</u>, de sorte que l'expérience d'émission et de réception d'un photon est invariante par translation dans la direction $(\partial_t)^a$. Par conséquent

$$\boxed{(\Delta t_{rec} \equiv t'_{rec} - t_{rec}) = (\Delta t_{em} \equiv t'_{em} - t_{em})}$$

10 a) $u^t = \frac{dt}{d\tau} \Longrightarrow d\tau = (u^t)^{-1} dt$ le long de $\mathcal{L}$

Pour une orbite circulaire équatoriale, u^t = const. le long de l'orbite (voir l'Éq. (46)).

Par conséquent on peut intégrer la formule différentielle entre les évènements p et p', et l'on trouve

$$\boxed{\Delta\tau_{em} = (u^t)^{-1} \Delta t_{em}}$$

b) Dans la limite où $r_{rec} \to +\infty$, la métrique de Kerr tend vers celle de Minkowski, pour laquelle (en coordonnées sphériques)

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

Un observateur statique est tel que $dr = d\theta = d\varphi = 0$.

$\hookrightarrow \quad d\tau = (-ds^2)^{1/2} = dt$

Par conséquent, l'intervalle de temps propre écoulé entre les évènements q et q' le long de la ligne d'univers de l'observateur statique distant est

$$\boxed{\Delta\tau_{rec} = \Delta t_{rec}}$$

c) $$R \equiv \frac{\Delta \tau_{em}}{\Delta \tau_{rec}} = \frac{(u^t)^{-1} \Delta t_{em}}{\Delta t_{rec}} = \frac{1}{u^t} \quad \text{car } \Delta t_{em} = \Delta t_{rec}$$

$$\hookrightarrow \boxed{R = \frac{\sqrt{1 - 3v^2 + 2\bar{a}v^3}}{1 + \bar{a}v^3}}$$

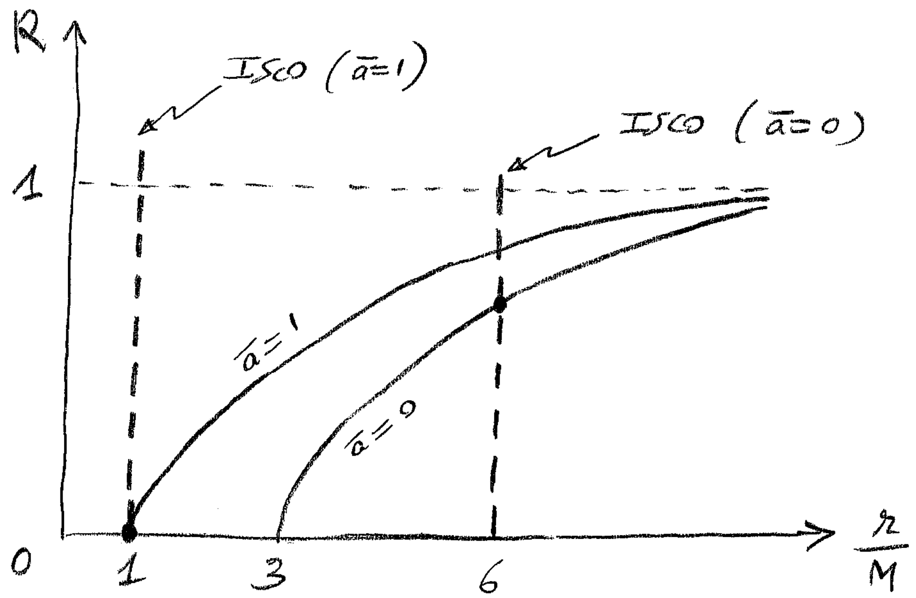
Il s'agit de l'effet Einstein.

d) $v \equiv \left(\frac{M}{r}\right)^{1/2} \longrightarrow 0$ lorsque $r \to +\infty$.

Dans cette limite, $\boxed{R \longrightarrow 1}$.

e) • $\bar{a} = 0 \Longrightarrow R = \sqrt{1 - \frac{3M}{r}} < 1$

• $\bar{a} = 1 \Longrightarrow R = \dfrac{\sqrt{1 - \frac{3M}{r} + 2\left(\frac{M}{r}\right)^{3/2}}}{1 + \left(\frac{M}{r}\right)^{3/2}} < 1$



2. Gargantua : un trou noir au cinéma

① a) La planète n'est pas un astre compact : $\Xi_p = \frac{m_p}{r_p} \ll 1$

Sa contribution à l'effet Einstein est donc négligeable par rapport à celle de Gargantua.

b) D'après l'énoncé, l'effet Einstein mentionné dans le film correspond à une "dilatation temporelle"

$$R = \frac{1\,h}{7\,\text{ans}} = \frac{1}{7 \times 365{,}25 \times 24} \sim 10^{-5} \ll 1$$

D'après les réponses aux questions ⑧ b) et ⑩ e) de l'exercice 1,

$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}7$ à l'ISCO d'un trou noir statique $(\bar{a} = 0)$

et $R \longrightarrow 0$ à l'ISCO d'un trou noir de Kerr extrême $(\bar{a} = 1)$.

Par conséquent, la valeur $R \sim 10^{-5} \ll 1$ ne peut s'expliquer que si la planète se trouve sur l'ISCO d'un trou noir en rotation rapide, i.e. avec $\bar{a} = 1 - \varepsilon$ où $0 < \varepsilon \ll 1$.

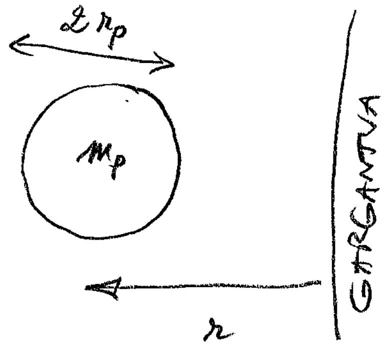
c) $R^3_{ISCO} = \frac{3\sqrt{3}}{16}\,\varepsilon \implies \varepsilon = \frac{16}{3\sqrt{3}}\,(1{,}63 \times 10^{-5})^3 = 1{,}3 \times 10^{-14}$

$$\implies \boxed{\bar{a} \simeq 1 - 10^{-14}\,!}$$

Le moment angulaire de Gargantua est extrêmement proche de la valeur maximale pour un trou noir de Kerr.

2) a) $$\boxed{g_{\text{milieu}} \simeq \frac{m_p}{r_p^2}}$$

b) $$\boxed{g_{\text{marée}} \simeq \frac{M}{r^3}\,(2r_p)}$$



3) a) La planète n'est pas détruite par le champ de marée du trou noir si et seulement si

$$\boxed{g_{\text{milieu}} > g_{\text{marée}}}$$

b) $$r = M \Longrightarrow g_{\text{marée}} \simeq \frac{2r_p}{M^2}$$

$$g_{\text{milieu}} > g_{\text{marée}} \iff \frac{m_p}{r_p^2} > \frac{2r_p}{M^2}$$

$$m_p = \left(\frac{4}{3}\pi r_p^3\right)\bar{\rho}$$

$$\iff M^2 > \frac{2\cancel{r_p^3}}{\left(\frac{4}{3}\pi \cancel{r_p^3}\right)\bar{\rho}}$$

$$\iff \boxed{M > \left(\frac{3}{2\pi\bar{\rho}}\right)^{1/2}}$$

Le champ de marée est d'autant plus faible que la masse du trou noir est élevée. Celà se comprend bien car les trous noirs sont des astres compacts, dont la taille caractéristique est proportionnelle à leur masse. Pour que la planète ne ressente pas les variations du champ gravitationnel du trou noir, il faut donc que celui-ci soit suffisamment massif.

(4) a) En restorant les facteurs de G et c de façon à obtenir une équation homogène, nous avons

$$M > M_{min} \quad \text{avec} \quad \boxed{M_{min} = \frac{c^3}{G}\left(\frac{3}{2\pi G \bar{\rho}}\right)^{1/2}}$$

Numériquement $M_{min} \simeq 3{,}4 \times 10^{38}\ kg \simeq \underline{1{,}7 \times 10^{8}\ M_\odot}$

b) En restorant les facteurs de G et c, $J = \frac{G}{c} \bar{a} M^2$

Nous avons donc

$$J > J_{min} \quad \text{avec} \quad \boxed{J_{min} = \frac{G}{c} \bar{a} M^2_{min} \underset{\bar{a} \simeq 1}{\simeq} \frac{3c^5}{2\pi G^2 \bar{\rho}}}$$

Numériquement, $J_{min} \simeq \underline{2{,}6 \times 10^{58}\ kg \times m^2 \times s^{-1}}$

3. Déguisement spatio-temporel

Coordonnées sphéroïdales oblates $(x^\alpha) = (t, r, \theta, \varphi)$

Métrique g_{ab} de composantes

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + (r^2 + k\cos^2\theta)\left(\frac{dr^2}{r^2+k} + d\theta^2\right) + (r^2+k)\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

où $k = \text{const.}$

(1)
$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r^2+k\cos^2\theta}{r^2+k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2+k\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r^2+k)\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2+k\cos^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{(r^2+k)\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma$.

(2)
$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta}\left(\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}\right)$$

- $$\Gamma^t{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{tt} \left(\partial_\alpha g_{t\beta} + \partial_\beta g_{t\alpha} - \cancel{\partial_t g_{\alpha\beta}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\delta^t{}_\beta \, \partial_\alpha \cancel{g_{tt}} + \delta^t{}_\alpha \, \partial_\beta \cancel{g_{tt}} \right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\Gamma^t{}_{\alpha\beta} = 0}$$

- $$\Gamma^r{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{rr} \left(\partial_\alpha g_{r\beta} + \partial_\beta g_{r\alpha} - \partial_r g_{\alpha\beta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta} \left(\delta^r{}_\beta \, \partial_\alpha g_{rr} + \delta^r{}_\alpha \, \partial_\beta g_{rr} - \partial_r g_{\alpha\beta} \right)$$

$$\Gamma^r{}_{t\beta} = \frac{1}{2} \frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta} \left(\delta^r{}_\beta \, \cancel{\partial_t g_{rr}} + \cancel{\delta^r{}_t} \, \partial_\beta g_{rr} - \cancel{\partial_r g_{t\beta}} \right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\Gamma^r{}_{t\alpha} = \Gamma^r{}_{\alpha t} = 0}$$

$$\Gamma^r{}_{r\beta} = \frac{1}{2} \frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta} \left(\delta^r{}_\beta \, \partial_r g_{rr} + \partial_\beta g_{rr} - \partial_r g_{r\beta} \right)$$

$$\Gamma^r{}_{rr} = \frac{1}{2} \frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta} \underbrace{\partial_r g_{rr}}$$

$$= \frac{2r(r^2+k) - 2r(r^2+k\cos^2\theta)}{(r^2+k)^2} = \frac{2rk\sin^2\theta}{(r^2+k)^2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Gamma^r{}_{rr} = \frac{k\, r \sin^2\theta}{(r^2+k)(r^2+k\cos^2\theta)}}$$

$$\Gamma^r{}_{r\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta}\,\underbrace{\partial_\theta g_{rr}}_{=\,-\frac{2k\sin\theta\cos\theta}{r^2+k}}$$

$\downarrow$

$$\boxed{\Gamma^r{}_{r\theta} = \Gamma^r{}_{\theta r} = -\frac{k\sin\theta\cos\theta}{r^2+k\cos^2\theta}}$$

$$\Gamma^r{}_{r\varphi} = \frac{1}{2}\,\frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta}\left(\cancel{\delta^r{}_\varphi}\,\partial_r g_{\varphi\varphi} + \cancel{\partial_\varphi g_{rr}} - \partial_r \cancel{g_{r\varphi}}\right)$$

$\hookrightarrow$ $$\boxed{\Gamma^r{}_{r\varphi} = \Gamma^r{}_{\varphi r} = 0}$$

$$\Gamma^r{}_{\theta\rho} = \frac{1}{2}\,\frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta}\left(\delta^r{}_\rho\,\partial_\theta g_{rr} - \partial_r g_{\theta\rho}\right)$$

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}\,\frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta}\,\partial_r g_{\theta\theta} \longrightarrow \boxed{\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{r(r^2+k)}{r^2+k\cos^2\theta}}$$

$$\Gamma^r{}_{\theta\varphi} = -\frac{1}{2}\,\frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta}\,\partial_r \cancel{g_{\theta\varphi}} \longrightarrow \boxed{\Gamma^r{}_{\theta\varphi} = \Gamma^r{}_{\varphi\theta} = 0}$$

$$\Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}\,\frac{r^2+k}{r^2+k\cos^2\theta}\,\partial_r g_{\varphi\varphi} \longrightarrow \boxed{\Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -\frac{r(r^2+k)\sin^2\theta}{r^2+k\cos^2\theta}}$$

$$\bullet\quad \Gamma^{\theta}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\partial_\alpha g_{\theta\beta} + \partial_\beta g_{\theta\alpha} - \partial_\theta g_{\alpha\beta} \right)$$

$$= \frac{1}{2(r^2+k\cos^2\theta)} \left(\delta^\theta{}_\beta \, \partial_\alpha g_{\theta\theta} + \delta^\theta{}_\alpha \, \partial_\beta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\alpha\beta} \right)$$

$$\boxed{\Gamma^{\theta}{}_{t\alpha} = \Gamma^{\theta}{}_{\alpha t} = 0}$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{r\beta} = \frac{1}{2(r^2+k\cos^2\theta)} \left(\delta^\theta{}_\beta \, \partial_r g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{r\beta} \right)$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{rr} = - \frac{\partial_\theta g_{rr}}{2(r^2+k\cos^2\theta)} \longrightarrow \boxed{\Gamma^{\theta}{}_{rr} = \frac{k \sin\theta \cos\theta}{(r^2+k)(r^2+k\cos^2\theta)}}$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \frac{\partial_r g_{\theta\theta}}{2(r^2+k\cos^2\theta)} \longrightarrow \boxed{\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = \frac{r}{r^2+k\cos^2\theta}}$$

$$\boxed{\Gamma^{\theta}{}_{r\varphi} = \Gamma^{\theta}{}_{\varphi r} = 0}$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{\theta\beta} = \frac{1}{2(r^2+k\cos^2\theta)} \left(\delta^\theta{}_\beta \, \partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\beta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\beta} \right)$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} = \frac{\partial_\theta g_{\theta\theta}}{2(r^2+k\cos^2\theta)} \longrightarrow \boxed{\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} = - \frac{k \sin\theta \cos\theta}{r^2+k\cos^2\theta}}$$

$$\boxed{\Gamma^{\theta}{}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\theta}{}_{\varphi\theta} = 0}$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = - \frac{\partial_\theta g_{\varphi\varphi}}{2(r^2+k\cos^2\theta)} \longrightarrow \boxed{\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = - \frac{(r^2+k)\sin\theta\cos\theta}{r^2+k\cos^2\theta}}$$

- $$\Gamma^{\varphi}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \left(\partial_\alpha g_{\varphi\beta} + \partial_\beta g_{\varphi\alpha} - \cancel{\partial_\varphi g_{\alpha\beta}} \right)$$

$$= \frac{1}{2(r^2+k)\sin^2\theta} \left(\delta^{\varphi}{}_{\beta}\, \partial_\alpha g_{\varphi\varphi} + \delta^{\varphi}{}_{\alpha}\, \partial_\beta g_{\varphi\varphi} \right)$$

non nul si $\underline{\alpha = \varphi \text{ ou } \beta = \varphi}$.

$$\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\beta} = \frac{1}{2(r^2+k)\sin^2\theta} \left(\cancel{\partial_\varphi g_{\varphi\beta}} + \partial_\beta g_{\varphi\varphi} \right)$$

$$\boxed{\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi t} = \Gamma^{\varphi}{}_{t\varphi} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\varphi} = 0}$$

$$\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi r} = \frac{\partial_r g_{\varphi\varphi}}{2(r^2+k)\sin^2\theta} \longrightarrow \boxed{\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi r} = \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} = \frac{r}{r^2+k}}$$

$$\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \frac{\partial_\theta g_{\varphi\varphi}}{2(r^2+k)\sin^2\theta} \longrightarrow \boxed{\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \cotan\theta}$$

3) a) $$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = -\frac{\partial \Gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\delta}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \Gamma^{\delta}{}_{\varepsilon\alpha}\Gamma^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\delta}{}_{\varepsilon\beta}\Gamma^{\varepsilon}{}_{\alpha\gamma}$$

b) En prenant la $\underline{\text{limite } M \to 0}$ dans la métrique de Kerr (1) en coordonnées de Boyer-Lindquist, on obtient

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2} dr^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)\, d\theta^2 + (r^2+a^2)\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

On reconnaît la métrique (15) avec la constante $\underline{k = a^2}$.

Or lorsque $M \to 0$ la métrique de Kerr coïncide avec la <u>métrique de Minkowski</u> η_{ab}, dont le tenseur de Riemann $R_{abc}{}^{d}$ est nul.

Par conséquent, un calcul long et pénible des composantes $R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ du tenseur de Rieman par rapport aux coordonnées sphéroïdales oblates, en utilisant l'expression de la question ③ a) ainsi que les composantes $\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ calculées dans la question ②, doit nécessairement révéler que $\underline{R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 0}$ pour toutes les composantes.

④ $(x^{\alpha}) = (t, r, \theta, \varphi) \longrightarrow (x'^{\alpha}) = (t, x, y, z)$

où
$$\begin{cases} x = \sqrt{r^2+k}\,\sin\theta\cos\varphi \\ y = \sqrt{r^2+k}\,\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Loi de transformation des tenseurs :

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}\, g'_{\rho\sigma}}$$

D'après la réponse à la question ③ b) on se doute que $\underline{(g'_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)}$. Vérifions cette hypothèse en s'assurant que la loi de transformation des tenseurs conduit bien à la métrique (15).

- $g_{tt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\frac{\partial x^\beta}{\partial t} g'_{\alpha\beta} = g'_{tt} = \longrightarrow \boxed{g_{tt} = -1}$

- $g_{tr} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\frac{\partial x^\beta}{\partial r} g'_{\alpha\beta} = \underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial r}}_{=0 \text{ si } \beta = t} \underbrace{g'_{t\beta}}_{\neq 0 \text{ si } \beta = t} \longrightarrow \boxed{g_{tr} = 0}$

- De même, $\boxed{g_{t\theta} = 0}$ et $\boxed{g_{t\varphi} = 0}$.

- $g_{rr} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial r}\frac{\partial x^\beta}{\partial r} g'_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$

$$= \frac{r^2}{r^2+k}\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi\right) + \cos^2\theta$$

$\downarrow$

$$\boxed{g_{rr} = \frac{r^2 + k\cos^2\theta}{r^2+k}}$$

- $g_{r\theta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial r}\frac{\partial x^\beta}{\partial \theta} g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$

$$= \frac{r}{\cancel{\sqrt{r^2+k}}}\sin\theta\cos\varphi\,\cancel{\sqrt{r^2+k}}\cos\theta\cos\varphi + \frac{r}{\cancel{\sqrt{r^2+k}}}\sin\theta\sin\varphi\,\cancel{\sqrt{r^2+k}}\cos\theta\sin\varphi + \cos\theta(-r\sin\theta)$$

$$= r\sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) - r\sin\theta\cos\theta$$

$\downarrow$

$\boxed{g_{r\theta} = 0}$ De même, $\boxed{g_{r\varphi} = 0}$.

- $$g_{\theta\theta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta}\frac{\partial x^\beta}{\partial \theta} g_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$= (r^2+k)\cos^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^2\theta$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{g_{\theta\theta} = r^2 + k\cos^2\theta}$$

- $$g_{\theta\varphi} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta}\frac{\partial x^\beta}{\partial \varphi} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\cancel{\frac{\partial z}{\partial \varphi}}$$

$$= (r^2+k)\left(\cos\theta\cos\varphi\sin\theta(-\sin\varphi) + \cos\theta\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{g_{\theta\varphi} = 0}$$

- $$g_{\varphi\varphi} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \varphi}\frac{\partial x^\beta}{\partial \varphi} g_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \cancel{\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}$$

$$= (r^2+k)\sin^2\theta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{g_{\varphi\varphi} = (r^2+k)\sin^2\theta}$$

L'espace-temps $(\mathcal{E}, g_{ab})$ coïncide donc avec l'<u>espace-temps de Minkowski</u>. Les coordonnées $(x^\alpha) = (t, x, y, z)$ sont des <u>coordonnées</u> globalement <u>inertielles</u> pour la métrique η_{ab}.